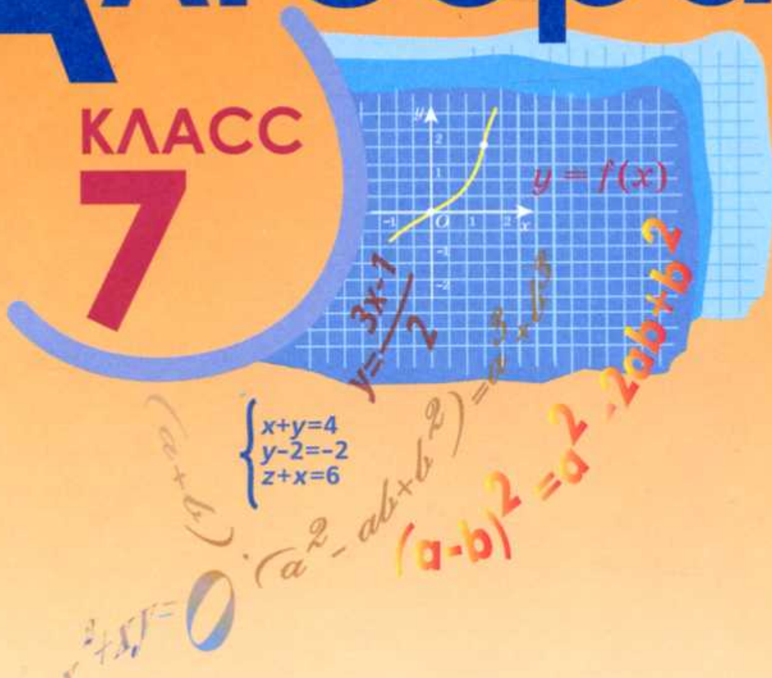
Алгебра

класс

7



УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Алгебра
7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Углублённый уровень

Москва
«Просвещение»
2018

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

6+

Авторы:
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов

На учебное пособие получены **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАО № 1138 от 19.11.16), **педагогической** (заключение РАО № 1029 от 21.11.16) и **общественной** (заключение РКС № 349-ОЭ от 19.12.16) экспертиз.

А45 **Алгебра. 7 класс** : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : углубл. уровень / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков и др.]. — М. : Просвещение, 2018. — 304 с. : ил. — ISBN 978-5-09-051122-3.

Данное учебное пособие предназначено для углублённого изучения алгебры в 7 классе. Это первое пособие завершённой линии учебных пособий по алгебре для 7—9 классов, подготовленных в соответствии со всеми требованиями Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. Особенностями этого пособия являются расширение и углубление традиционных учебных тем за счёт теоретико-множественной, вероятностно-статистической и историко-культурной линий. Оно содержит большое количество тренировочных упражнений и нестандартных заданий творческого характера.

Главы 1, 5, 7 написаны Ю. Н. Макарычевым; главы 2, 3, 4 — Н. Г. Миндюк; главы 6, 8 — К. И. Нешковым; доработка некоторых тем и ряда упражнений выполнена И. Е. Феоктистовым.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич, **Миндюк** Нора Григорьевна, **Нешков** Константин Иванович, **Феоктистов** Илья Евгеньевич

АЛГЕБРА
7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Углублённый уровень

Центр естественно-математического образования. Редакция математики и информатики. Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *И. В. Рекман*. Младший редактор *Е. А. Андреенкова*. Художник *А. Г. Бушин*. Художествени редактор *О. П. Богомолова*. Фотографии из фотобанка «*Picvario*». Компьютерная графика *Н. А. Артемьевой*. Компьютерная вёрстка и техническое редактирование *О. В. Храбровой*. Корректор *М. С. Амелькина*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 15.06.17. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура NewtonCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 16,98. Тираж 1500 экз. Заказ № 5849.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы» ОАО «Издательство «Высшая школа». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46. Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51.

ISBN 978-5-09-051122-3

Предисловие для учащихся

Дорогие семиклассники! Вы приступаете к изучению нового для вас школьного предмета — алгебры. Этот раздел математики появился много веков назад как *наука о решении уравнений*. Первым сочинением, посвящённым вопросам алгебры, считают книгу среднеазиатского учёного Мухаммеда ибн Мусы ал-Хорезми «Китаб аль-джебр валь-мукабала» (830). В переводе с арабского название этого трактата звучит так: «Книга о восстановлении и противопоставлении». Действительно, Мухаммед из Хорезма, перенося члены уравнения из одной части в другую, «уничтожал» их в одной части и «восстанавливал» в другой с противоположным знаком. «Восстановление» по-арабски — аль-джебр. От этого слова и произошло название *алгебра*.

На уроках алгебры вы будете заниматься не только решением уравнений. Вам предстоит познакомиться с буквенными выражениями, тождествами, функциями, множествами, научиться решать системы уравнений и неравенств и многое, многое другое. Иными словами, сначала вы познакомитесь с основами алгебры, с её специфическим языком. И лишь позже сможете решать сложные задачи по алгебре, комбинаторике, математическому анализу, тригонометрии и т. п.

Это не значит, что в данном пособии будут встречаться только лёгкие упражнения. Напротив, книга, которую вы держите в руках, предназначена для учащихся, проявляющих не только интерес к математике, но и сообразительность, упорство в достижении цели. В ней содержатся вместе с большим количеством тренировочных упражнений и сложные задания творческого характера. Проблемные, исследовательские задачи отмечены особым образом — их номер дан другим цветом.

Для успешного овладения алгебраическим языком вам необходимо внимательно знакомиться с объяснительными текстами пособия. После изучения каждого параграфа полезно проверить себя, отвечая на контрольные вопросы и решая контрольные задания.

Авторы выражают надежду, что новый школьный предмет не только позволит вам научиться решать различные задачи, но и откроет для вас алгебру как часть общечеловеческой культуры, как возможность развития и проявления своих способностей.

Внутри текста используются следующие обозначения:

— формулировки определений и теорем

— выделение правил и свойств

! — выделение важного материала

A — порядок действий, алгоритм

Глава 1 Выражение и множество его значений

В этой главе рассказывается о множествах и их элементах, о способах задания множеств, о подмножествах; вводятся соответствующие обозначения. Темы «Числовые выражения» и «Выражения с переменными» вам хорошо знакомы из курса математики 5—6 классов. С пункта «Статистические характеристики» начинается систематическое изучение элементов математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей. Здесь будет рассказано о том, что такое выборка, ряд данных, а также о том, какие статистические характеристики для них существуют.

§ 1. Множества

1. Множество. Элемент множества

В жизни часто приходится встречаться с различными совокупностями объектов, объединённых в одно целое по некоторому признаку. Для обозначения этих совокупностей используются различные слова. Например, говорят: стадо коров, букет цветов, команда футболистов и т. д.

В математике в целях единообразия для обозначения совокупностей употребляется единый термин — множество. Например, говорят: множество чётных чисел, множество двузначных чисел, множество правильных дробей со знаменателем 5.

Термин «множество» употребляется и тогда, когда речь идёт о нечисловых множествах. Например, говорят о множестве диагоналей многоугольника, о множестве точек координатной плоскости, о множестве прямых, проходящих через данную точку.

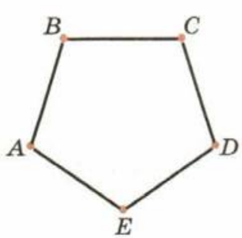


Рис. 1

Объекты или предметы, составляющие множество, называют элементами множества. Например, число 89 — элемент множества двузначных чисел; точка B (рис. 1) — элемент множества вершин многоугольника $ABCDE$.

Множества бывают конечные и бесконечные. Например, множество двузначных чисел — конечное множество (оно содержит 90 элементов), а множество чётных чисел — бесконечное множество.

Конечное множество может содержать миллиард элементов, 2 элемента, 1 элемент или даже не содержать ни одного элемента.

Рассмотрим множество простых чисел, заключённых между натуральными числами m и n. Если $m = 10$ и $n = 20$, то между ними заключено 4 простых числа. Это числа 11, 13, 17 и 19. Если $m = 20$ и $n = 25$, то между ними заключено только одно простое число — число 23. Если $m = 32$ и $n = 37$, то между ними нет ни одного простого числа. В этом случае говорят, что множество простых чисел, заключённых между числами 32 и 37, — пустое множество.

Вообще пустым называют множество, не содержащее ни одного элемента. Для его обозначения ввели специальный знак $\varnothing$.

Конечные множества обычно записывают с помощью фигурных скобок. Например, множество вершин пятиугольника $ABCDE$ (см. рис. 1) можно записать так:

$$\{A;\ B;\ C;\ D;\ E\},$$

а множество двузначных чисел, кратных 15, так:

$$\{15;\ 30;\ 45;\ 60;\ 75;\ 90\}.$$

В таких случаях говорят, что множество задано *перечислением его элементов*.

Множества принято обозначать большими буквами латинского алфавита. Например, рассмотренные выше множества вершин пятиугольника и двузначных чисел, кратных 15, можно обозначить соответственно буквами K и L и записать так:

$$K = \{A;\ B;\ C;\ D;\ E\};$$
$$L = \{15;\ 30;\ 45;\ 60;\ 75;\ 90\}.$$

Для основных числовых множеств введены специальные обозначения: множество натуральных чисел обозначают буквой $\boldsymbol{N}$ (от латинского слова *natural* — естественный), множество целых чисел — буквой $\boldsymbol{Z}$ (от немецкого слова *zahl* — число), множество рациональных чисел — буквой $\boldsymbol{Q}$ (от латинского слова *quotient* — отношение).

Число -8 является элементом множества $\boldsymbol{Z}$. Иначе говорят, что число -8 принадлежит множеству $\boldsymbol{Z}$. Это предложение записывают короче: $-8 \in \boldsymbol{Z}$. Число 0,17 не принадлежит множеству $\boldsymbol{N}$ (не является элементом множества $\boldsymbol{N}$). Для выражения этого факта принята следующая запись: $0{,}17 \notin \boldsymbol{N}$. Вообще если a — элемент множества A, то пишут $a \in A$, если же b не принадлежит множеству A, то записывают $b \notin A$.

В тех случаях, когда задание множества перечислением элементов невозможно (как для бесконечного множества) или громоздко (как для конечного множества с большим числом элементов), множество задают описанием, указав его характеристическое свойство, т. е. свойство, которым обладают все элементы этого множества и не обладают никакие другие объекты.

Зададим с помощью описания некоторые множества.

Пусть

$$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14\}.$$

Зададим это множество описанием, используя понятие характеристического свойства. Множество A можно охарактеризовать как

«множество всех натуральных чисел от 1 до 14 включительно»,

или как

«множество всех натуральных чисел, меньших 15»,

или, используя знаки $\in$, $<$ и букву x для произвольного элемента множества A, как

«множество значений x, где $x \in N$ и $x < 15$».

Тот факт, что множество A состоит из элементов x, удовлетворяющих этим условиям, будем записывать так:

$$A = \{x \mid x \in N,\ x < 15\}.$$

В фигурных скобках сначала пишется буква x (или какая-либо другая буква) — обозначение произвольного элемента множества, затем после вертикальной черты описывается условие, которому должны удовлетворять значения x.

Пусть B — множество натуральных чисел, кратных 5. Множество B является бесконечным. Запишем первые его элементы в порядке возрастания: 5, 10, 15, 20, 25, ...

Множество B с помощью его характеристического свойства можно задать так:

$$B = \{x \mid x = 5n,\ n \in N\}.$$

Рассмотрим множества

$$C = \{y \mid y = 2x,\ x \in N,\ x < 7\} \text{ и } D = \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12\}.$$

Эти множества состоят из одних и тех же элементов. В таких случаях говорят, что множества равны, и пишут $C = D$.

Заметим, что порядок элементов в записи множеств не имеет значения. Например, множества $\{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$ и $\{5;\ 3;\ 7;\ 4;\ 6\}$ равны, хотя элементы в этих множествах записаны в различном порядке.

Упражнения

1. Запишите с помощью перечисления элементов, используя фигурные скобки, множество:

а) двузначных чисел, начинающихся цифрой 6;

б) двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 7;

в) натуральных чисел, заключённых между числами 63 и 67;

г) натуральных чисел, заключённых между числами 31 и 33.

2. Пусть A — множество двузначных чисел, B — множество трёхзначных чисел. Запишите, используя знак $\in$, какое из чисел 48, 732, 29 принадлежит множеству A, а какое — множеству B.

3. Прочитайте запись:

а) $276 \in \boldsymbol{N}$; в) $3{,}7 \notin \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{1}{2} \in \boldsymbol{Q}$;

б) $-8 \notin \boldsymbol{N}$; г) $0 \notin \boldsymbol{N}$; е) $-243 \in \boldsymbol{Q}$.

4. Запишите, используя знаки $\in$ или $\notin$, следующее высказывание:
а) число 15 принадлежит множеству $\boldsymbol{N}$;
б) число 283 — натуральное;
в) число -41 не является натуральным;
г) число -579 — целое;
д) число 0,125 не является целым.

5. Запишите с помощью перечисления элементов:
а) множество однозначных чисел;
б) множество целых чисел, модуль которых меньше 4;
в) множество натуральных чисел, кратных 3 и меньших 20;
г) множество правильных дробей со знаменателем 5.

6. Запишите с помощью перечисления элементов:
а) множество M сторон пятиугольника $ABCDE$ (см. рис. 1);
б) множество L букв, которые использовались для записи слова «коробка».

7. Определите, по какому признаку составлено множество чисел:
а) $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30\}$;
б) $B = \{17; 34; 51; 68; 85\}$;
в) $C = \{17; 27; 37; 47; 57; 67; 77; 87; 97\}$;
г) $D = \{13; 23; 43; 53; 73; 83\}$.

Сформулируйте и запишите соответствующий признак для каждого из множеств.

8. Известно, что A — множество двузначных чисел, цифры десятков и единиц которых одинаковы, B — множество натуральных чисел, заключённых между числами 19 и 30, C — множество натуральных чисел, меньших 100 и кратных 11, D — множество двузначных чисел, в которых цифра десятков равна 2. Выделите из этих множеств равные множества.

9. Запишите с помощью перечисления элементов множество:
а) $X = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x < 8\}$;
б) $Y = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x > 17$ и $x < 25\}$;
в) $K = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, x > -5$ и $x < 3\}$;
г) $L = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, |x| < 5\}$.

10. Задайте множество характеристическим свойством, обозначив произвольный элемент множества буквой x:
а) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
б) $B = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$;
в) C — множество натуральных чисел, больших 100.

11. Назовите 5 элементов множества X, если:

а) $X = \{x \mid x \in N, x^2 > 40\}$; б) $X = \{x \mid x \in N, x$ кратно $3\}$.

12. Задайте множество перечислением элементов, если:

а) M — множество обыкновенных несократимых дробей с однозначным знаменателем, заключённых между числами $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{2}$;

б) L — множество десятичных дробей с одним знаком после запятой, больших $\frac{1}{4}$ и меньших 1.

13. Составьте множество двузначных чисел, в записи которых используются лишь цифры:

а) 1 и 5; б) 1, 5 и 7; в) 1, 5 и 0.

14. Составьте множество трёхзначных чисел, в записи которых используются лишь цифры:

а) 2 и 7; б) 2, 7 и 0.

15. В трёхзначном числе цифру сотен обозначили буквой a, цифру десятков — буквой b, цифру единиц — буквой c. Пусть K — множество трёхзначных чисел, таких, что $a - b = 2$ и $b + c = 7$. Принадлежит ли множеству K число:

а) 752; б) 316; в) 681; г) 970?

Упражнения для повторения

16. Найдите 1% числа 360. Найдите 10%, 90%, 120% того же числа.

17. Найдите:

а) 5% числа 400; г) 75% числа 40;
б) 20% числа 75; д) 150% числа 240;
в) 50% числа 16; е) 7% числа 35.

18. В магазин привезли 5 т картофеля. В первый день продали 30% всего картофеля, а во второй — 40% остатка. Сколько тонн картофеля осталось после двух дней торговли?

19. Вкладчик положил в банк 1500 р. Какую сумму он получит через год, если банк выплачивает вкладчику доход из расчёта 16% годовых?

2. Подмножество

Рассмотрим множество $A = \{2; 5; 7; 8; 12; 35; 48\}$. Выделим из этого множества те элементы, которые являются двузначными числами. Обозначив эту часть множества A буквой B, получим

$$B = \{12; 35; 48\}.$$

Каждый элемент множества B является элементом множества A. Множество B называется подмножеством множества A.

Определение. **Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.**

Символически это записывают так: $B \subset A$ (читают: «B есть подмножество A» или «множество B содержится в множестве A»).

Пример 1. Множество трёхзначных чисел есть подмножество множества N натуральных чисел.

Пример 2. Множество чисел, кратных 4, является подмножеством множества чётных чисел (каждое число, кратное 4, делится на 2, т. е. является чётным числом).

Пример 3. Множество точек отрезка CM (рис. 2) является подмножеством множества точек отрезка CD. (Каждая точка, принадлежащая отрезку CM, принадлежит также отрезку CD.)

Рис. 2

Для иллюстрации соотношения между множествами пользуются схемами, называемыми <u>кругами Эйлера</u>. На рисунке 3 изображены множество A (большой круг) и множество B (малый круг, заключённый внутри большого). Эта схема означает, что B — подмножество множества A.

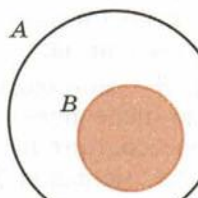


Рис. 3

Подмножество данного множества может совпадать с самим множеством. Это вытекает из определения. Поясним на примере.

Пусть A — множество двузначных чисел, оканчивающихся нулём, т. е. $A = \{10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90\}$, а B — множество двузначных чисел, кратных 10. Тогда B представляет собой подмножество множества A, так как каждое двузначное число, кратное 10, оканчивается нулём. Значит, каждый элемент множества B является элементом множества A.

Леонард Эйлер (1707—1783), математик, механик, физик и астроном, по происхождению швейцарец; работал в России и Германии; автор свыше 800 работ по математическому анализу, теории чисел, дифференциальной геометрии, математической физике, небесной механике и др.; оказал значительное влияние на развитие науки.

В то же время множество A есть подмножество множества B, поскольку каждое двузначное число, оканчивающееся нулём, кратно 10.

Итак, $B \subset A$ и $A \subset B$. Из этого следует, что $A = B$.

Если множество B представляет собой подмножество множества A, причём $B \neq \varnothing$ и $B \neq A$, то B называют *собственным подмножеством* множества A. Заметим, что если A — произвольное множество, то пустое множество является подмножеством множества A, т. е. всегда $\varnothing \subset A$.

Упражнения

20. Докажите, что каждое из множеств $A = \{1; 5\}$, $B = \{2; 3; 7\}$, $C = \{4; 5; 8; 9\}$ является подмножеством множества однозначных чисел.

21. Пусть L — множество однозначных натуральных чисел. Составьте с помощью перечисления элементов подмножество множества L, в котором все элементы:

а) простые числа;
б) чётные числа;
в) нечётные числа;
г) числа, кратные 9.

22. Пусть B — множество натуральных чисел, кратных 5. Составьте с помощью перечисления элементов такое подмножество множества B, которое состоит из:

а) чисел, меньших 55;
б) чётных чисел, меньших 55;
в) нечётных чисел, меньших 55;
г) чисел, кратных 26 и меньших 55.

23. Прочитайте запись:

а) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$; б) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

Изобразите каждое из этих соотношений между множествами с помощью кругов Эйлера.

24. Пусть C — множество обыкновенных дробей с числителем, равным 1. Запишите с помощью перечисления элементов подмножество множества C дробей:

а) со знаменателями 7, 6 и 5;
б) больших $\frac{1}{16}$ и меньших $\frac{1}{9}$;
в) больших $\frac{1}{10}$;
г) больших $\frac{2}{5}$.

25. Из множества двузначных чисел выделите подмножество чисел, у которых:

а) сумма цифр равна 9;
б) разность между числом десятков и числом единиц равна 8;
в) произведение числа десятков и числа единиц равно 6;
г) произведение числа десятков и числа единиц равно сумме числа десятков и числа единиц.

26. Даны множества:

$$A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \boldsymbol{N}\},$$
$$B = \{x \mid x = 4n,\ n \in \boldsymbol{N}\},$$
$$C = \{x \mid x = 6n,\ n \in \boldsymbol{N}\}.$$

Какое из этих множеств является подмножеством другого множества? Сделайте соответствующие записи, используя знак $\subset$.

27. Из некоторого множества P составили все его подмножества:

$$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a;\ b\},\ \{a;\ c\},\ \{b;\ c\},\ \{a;\ b;\ c\}.$$

Запишите множество P.

28. Составьте все подмножества множества A, если:

а) $A = \{1;\ 5\}$; б) $A = \{8\}$; в) $A = \{2;\ 3;\ 4\}$.

Упражнения для повторения

29. Пусть A — множество чисел, кратных 2; B — множество чисел, кратных 5; $C = \{135;\ 253;\ 374;\ 470;\ 586;\ 721\}$. Выпишите все элементы множества C, которые:

а) принадлежат множеству A;
б) принадлежат множеству B;
в) принадлежат множествам A и B;
г) не принадлежат ни множеству A, ни множеству B.

30. На склад привезли 3,6 т сахарного песка, затем 75% этого количества отправили в магазин и палатку, причём в магазин отправили на 0,9 т больше, чем в палатку. Сколько сахарного песка отправили в палатку?

31. Найдите число, если известно, что:

а) 2% этого числа равны 3,5;
б) 70% этого числа равны 29,4;
в) 140% этого числа равны 112.

? Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры числового и нечислового множеств.

2. Сформулируйте признак, по которому составлено множество

$$A = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}.$$

3. Что называется подмножеством данного множества? Приведите пример.

4. Запишите с помощью перечисления элементов множество

$$\{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ x > -2 \text{ и } x \leqslant 5\}.$$

§2. Числовые выражения и выражения с переменными

3. Числовые выражения

Вам уже неоднократно приходилось встречаться с <u>*числовыми выражениями*</u>. Простейшими из них являются выражения, составленные из двух чисел и одного знака действия. Примерами таких выражений являются сумма $2{,}7 + 3{,}42$, разность $\frac{5}{9} - \frac{1}{2}$, произведение $18 \cdot (-0{,}25)$, частное $1224 : 48$.

Более сложными являются числовые выражения, составленные из нескольких чисел с помощью двух или более знаков действий, а также скобок. Приведём примеры таких выражений:

$$18-2{,}5\cdot 0{,}6; \qquad 0{,}6\cdot 1{,}7+10{,}2\cdot 13{,}2; \qquad 3{,}4:(1{,}6+5{,}2).$$

Согласно известным правилам порядка выполнения действий, первое из этих выражений можно рассматривать как разность числа 18 и произведения $2{,}5 \cdot 0{,}6$, второе — как сумму произведений $0{,}6 \cdot 1{,}7$ и $10{,}2 \cdot 13{,}2$, третье — как частное числа 3,4 и суммы чисел 1,6 и 5,2.

Заметим, что в качестве знака деления в числовых выражениях часто используют черту дроби. Например, выражение $3{,}4 : (1{,}6 + 5{,}2)$ можно записать так: $\frac{3{,}4}{1{,}6+5{,}2}$.

В результате выполнения действий в числовом выражении получается число, которое называют <u>*значением выражения*</u>.

Например, значение выражения $8{,}6+2{,}7\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)$ равно 9,5.

Выражение $3 : (52 - 4 \cdot 13)$ значения не имеет, так как не все указанные действия можно выполнить (значение выражения в скобках равно нулю, а делить на нуль нельзя).

О таких выражениях говорят, что они *не имеют смысла*.

При решении многих задач приходится сравнивать значения числовых выражений. Результат сравнения записывают в виде верного числового равенства или неравенства.

Сравним, например, значения выражений $12 \cdot 4$ и $144 : 3$. Так как $12 \cdot 4 = 48$ и $144 : 3 = 48$, то верно равенство $12 \cdot 4 = 144 : 3$.

Сравним теперь значения выражений $3{,}5 \cdot 2$ и $8{,}4 - 3{,}2$. Так как $3{,}5 \cdot 2 = 7$, а $8{,}4 - 3{,}2 = 5{,}2$, и при этом 7 больше 5,2, то верно неравенство $3{,}5 \cdot 2 > 8{,}4 - 3{,}2$.

Не выполняя вычислений, можно определить, что значение выражения $0{,}8 \cdot 0{,}12$ больше нуля и меньше 1. Это можно записать в виде двух неравенств $0{,}8\cdot 0{,}12>0$ и $0{,}8 \cdot 0{,}12 < 1$ или в виде одного <u>*двойного неравенства*</u>: $0 < 0{,}8 \cdot 0{,}12 < 1$ (читают: «нуль меньше произведения

0,8 · 0,12, и произведение 0,8 · 0,12 меньше единицы» или так: «произведение 0,8 и 0,12 больше нуля, но меньше единицы»).

Два неравенства 84 > 35 и 35 > 17 можно записать в виде двойного неравенства: 84 > 35 > 17 (читают: «84 больше 35, и 35 больше 17»).

Упражнения

32. Запишите в виде числового выражения:

а) сумму числа 25 и произведения чисел 16 и 74;
б) разность произведения чисел 37 и 6 и произведения чисел 29 и 5;
в) произведение разности чисел 86 и 17 и их суммы;
г) частное числа 98 и суммы чисел 9 и 5.

33. Выясните, какие числовые выражения не имеют смысла:

$$(2{,}5-5{,}5:2{,}2):(4{,}8-0{,}3-1{,}3),$$

$$(2{,}5-5{,}5:1{,}1):\left(4{,}8-0{,}4\cdot 1\frac{1}{5}\right),\quad \frac{5{,}5:2{,}2-2{,}5}{4{,}8-0{,}3\cdot 1{,}3},$$

$$(2{,}8-5{,}5:2{,}2)\cdot(4{,}8+0{,}3\cdot(-1{,}6)).$$

34. Выполните действия:

а) $\left(3\frac{7}{30}-1\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}$; в) $\left(\frac{11}{18}-1\frac{7}{12}\right)\cdot\left(2\frac{1}{6}+\frac{7}{30}\right)$;

б) $\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}\right):1\frac{2}{3}$; г) $\left(3\frac{2}{5}-5\right)\cdot\left(\frac{31}{48}+\frac{7}{24}\right)$.

35. Найдите значение выражения:

а) (22,5 : 0,45) · (5,27 + 1,93);
б) (7,6 − 8,5) : (0,23 + 2,92);
в) 35,4 · (62,4 − 49,9) − 12,5 · 15,4;
г) 12,48 : (1,23 + 1,17) − 14,7 : 0,49.

36. Вычислите:

а) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+3}}$; б) $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{2}{1+3}}$; в) $2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-1}}}$; г) $2-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2+1}}}$.

37. Проверьте, верно ли равенство:

а) $\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)$;

б) $\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 17}=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)$;

в) $\frac{2}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{35}=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$.

38. Используя приём представления дробей в виде разности (см. задание 37), вычислите:

а) $\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}$;

в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$;

б) $\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{11\cdot12}+\frac{1}{12\cdot13}+\ldots+\frac{1}{18\cdot19}+\frac{1}{19\cdot20}$;

г) $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$.

39. Приведите пример двух правильных дробей, разность и произведение которых равны.

40. Представьте дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{4}$ в виде суммы *аликвотных* (от латинского слова *aliquot* — несколько) *дробей*, т. е. дробей, числители которых равны 1 (такие дроби встречаются в одном из самых древних письменных свидетельств математических знаний — в папирусе Райнда, потому иногда такие дроби называют египетскими).

41. В результате перестановки цифр двузначного числа это число увеличилось на 9. Найдите все такие двузначные числа.

42. Найдите разность между наименьшим четырёхзначным и наибольшим трёхзначным числами.

43. Найдите произведение наибольшего двузначного числа и наибольшей правильной дроби со знаменателем 11.

44. Найдите все несократимые дроби со знаменателем 12, которые заключены между числами $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

45. Найдите две какие-нибудь правильные дроби с равными знаменателями:

а) сумма которых равна $\frac{5}{7}$;

б) разность которых равна $\frac{1}{9}$;

в) произведение которых равно $\frac{6}{25}$;

г) частное которых равно $\frac{3}{5}$.

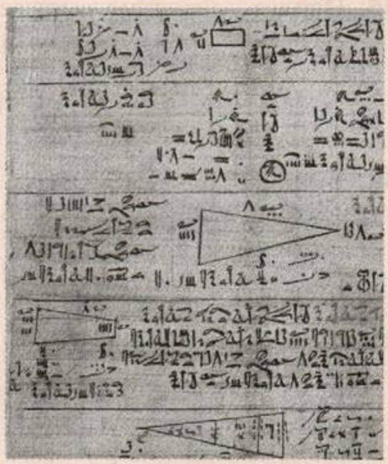
46. Замените знак * одним из знаков действия так, чтобы получилось верное равенство:

а) $\frac{1}{6}*\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$;

в) $\frac{3}{4}*\frac{7}{12}=\frac{1}{6}$;

б) $2\frac{1}{3}*\frac{9}{14}=1\frac{1}{2}$;

г) $1\frac{5}{6}*7\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$.



Фрагмент древнеегипетского папируса около 2000 г. до н. э.

47. Решите задачу, составив числовое выражение.

а) Периметр треугольника равен 20 см. Две его стороны равны между собой, а третья, меньшая, сторона равна 4 см. Какова длина равных сторон?

б) Из города A в город B выехали одновременно мотоциклист и автомобилист. Скорость мотоцикла равна 80 км/ч, а скорость автомобиля — 60 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч?

48. Найдите наибольшую правильную дробь:

а) со знаменателем 17; б) с числителем 1.

49. Сравните дроби:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{11}$ и $\frac{7}{11}$; в) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{7}$.

50. Сравните значения выражений:

а) $8{,}7 \cdot 1{,}5$ и $9{,}2 \cdot 1{,}4$; в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$;

б) $3{,}8 \cdot 1{,}2$ и $2{,}4 \cdot 1{,}9$; г) $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ и $\frac{2}{15}+\frac{7}{30}$.

51. Сравните значения выражений:

а) $0{,}99 \cdot 0{,}44$ и $0{,}99 + 0{,}44$; г) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$;

б) $0{,}32 : 0{,}2$ и $0{,}32 - 0{,}2$; д) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$;

в) $1{,}8 \cdot 2{,}25$ и $1{,}8 + 2{,}25$; е) $1\frac{7}{8}-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ и $1\frac{7}{8}:\frac{3}{4}:\frac{1}{3}$.

52. Расположите числа $-\frac{37}{500}$, $0{,}7$ и $-\frac{31}{41}$ в порядке убывания их модулей.

53. Найдите пять чисел, каждое из которых больше 0,4, но меньше $\frac{5}{11}$.

54. Сравните значения выражений, не производя вычислений:

а) $1{,}45 \cdot 0{,}9$ и $1{,}45 : 0{,}9$;
б) $3{,}06 \cdot 1{,}7$ и $3{,}06 : 1{,}7$;
в) $24{,}3 \cdot (-0{,}3)$ и $24{,}3 : (-0{,}3)$;
г) $2{,}25 \cdot (-1{,}5)$ и $2{,}25 : (-1{,}5)$.

55. Прочитайте двойное неравенство:

а) $5 < 8 < 12$; б) $37 < 52 < 100$.

56. Запишите в виде двойного неравенства высказывание:

а) $5{,}4 \cdot 0{,}3$ больше 1 и меньше 2;

б) $-5{,}72 \cdot \frac{1}{4}$ больше -2 и меньше 0.

57. Задайте путём перечисления элементов множество:

а) $\{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ 2 < x < 10\}$;
б) $\{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ -5 < x < 3\}$.

Упражнения для повторения

58. Сколько процентов составляет:

а) число 12 от числа 48;
б) число 16,2 от числа 54;
в) число 38 от числа 475;
г) число 94,9 от числа 73?

59. Девочки составляют 54% всех учащихся школы. Сколько девочек учится в этой школе, если в школе учится 552 мальчика?

60. Составьте множество двузначных чисел, в которых:

а) цифра десятков в 2 раза меньше цифры единиц;
б) цифра десятков на 2 меньше цифры единиц.

4. Статистические характеристики

Изучение, обработка и анализ количественных данных массовых процессов и явлений составляют статистическое (от латинского слова *status* — состояние, положение вещей) исследование. Уже в древности вёлся учёт населения, учёт площадей обрабатываемых земель и т. д. С развитием общества потребовались научные методы обработки и анализа статистических данных. С появлением математической статистики появились общие методы изучения статистических данных.

Любое статистическое исследование состоит из сбора и обработки информации, после чего проводится выработка различных прогнозов, оценка их достоверности и т. д. Важной задачей, без которой статистические данные теряют всякий смысл, является обработка полученных данных.

Рассмотрим пример. Учащимся седьмых классов некоторого города был предложен тест по математике, состоящий из 10 заданий. При проверке работ отмечали количество заданий, верно выполненных учащимися. Рассмотрим данные для двух случайно выбранных классов:

7 «А» класс:

8; 7; 2; 5; 10; 9; 8; 7; 7; 10; 9; 6; 5; 8; 8; 10; 9; 9; 10; 7; 9; 10; 7; 9; 6;

7 «Б» класс:

8; 7; 8; 6; 9; 9; 7; 8; 7; 9; 9; 6; 5; 8; 7; 10; 9; 10; 10; 7; 8; 9; 7; 9; 9.

Каждый из полученных рядов данных называют *выборкой*, а каждое число этого ряда — *вариантой* выборки. Количество чисел в ряду называют *объёмом* выборки. В нашем примере объёмом выборки является количество учащихся класса, участвовавших в тестировании. Для каждого класса объём выборки равен 25.

Приведённые выше два ряда данных не позволяют сравнить результаты выполнения теста учащимися двух классов. А если рассматривать результаты всех семиклассников некоторого города, то информация будет столь громоздкой, что окажется бесполезной. Потому для статистической обработки данных рассматривают различные статистические характеристики.

Сравним результаты выполнения теста учащимися двух классов. Найдём *среднее арифметическое* ряда данных для 7 «А» класса.

Определение. Средним арифметическим ряда данных называется частное суммы всех вариант ряда и количества вариант.

Поскольку количество вариант — это объём выборки, то *среднее арифметическое выборки есть частное суммы всех вариант и объёма выборки.*

Так средний балл учащихся 7 «А» класса в рассматриваемом примере равен:

$$\frac{8+7+2+5+10+9+8+7+7+10+9+6+5+8+8+10+9}{25}+$$

$$+\frac{9+10+7+9+10+7+9+6}{25}=7{,}8.$$

Вычисление среднего арифметического выборки можно выполнить короче. Для этого перепишем выборку для 7 «А» класса, расположив числа так, чтобы каждое следующее было *не меньше* предыдущего Получим 2; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 10; 10; 10; 10; 10.

Такую запись выборки называют *упорядоченным рядом данных*. Теперь легко видеть, что 2 балла получил один ученик, 6 баллов — два ученика, 10 баллов — пять учеников и т. д.

Количество появлений одной и той же варианты в выборке называют частотой этой варианты. Так, частота варианты 5 равна 2, а частота варианты 7 равна 5.

Составим *таблицу частот* вариант для учащихся 7 «А» класса. В первой строке запишем все возможные количества баллов, которые могли получить учащиеся при выполнении теста, т. е. числа от 0 до 10. Во второй строке запишем соответствующие частоты, т. е. число учащихся, получивших указанное количество баллов.

Баллы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число учащихся	0	0	1	0	0	2	2	5	4	6	5

Заметим, что сумма частот должна быть равна объёму выборки. Действительно,

$$1+2+2+5+4+6+5=25.$$

Теперь можно вычислить среднее арифметическое выборки проще:

$$\frac{2\cdot1+5\cdot2+6\cdot2+7\cdot5+8\cdot4+9\cdot6+10\cdot5}{1+2+2+5+4+6+5}=\frac{195}{25}=7{,}8.$$

Составим таблицу частот для 7 «Б» класса.

Баллы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число учащихся	0	0	0	0	0	1	2	6	5	8	3

Обычно в таблицу частот не включают варианты, частоты которых равны нулю. Тогда таблица частот для 7 «Б» класса будет такой:

Варианта (балл)	5	6	7	8	9	10
Частота (число учащихся)	1	2	6	5	8	3

Объём этой выборки равен 25, а среднее арифметическое равно

$$\frac{5\cdot1+6\cdot2+7\cdot6+8\cdot5+9\cdot8+10\cdot3}{25}=\frac{201}{25}=8{,}04.$$

Поскольку $8{,}04 > 7{,}8$, то можно сделать вывод, что учащиеся 7 «Б» в целом выполнили тест лучше учащихся 7 «А».

Составленные таблицы частот позволяют сделать и другие полезные выводы. Например, для выборки результатов учащихся 7 «А» класса наименьший полученный балл равен 2, наибольший — 10. Результаты всех учащихся класса располагаются между этими числами. Для выборки результатов учащихся 7 «Б» класса наименьшая варианта равна 5, наибольшая — 10. Это может означать, что 7 «Б» класс по своей математической подготовке является более однородным, чем 7 «А».

Определение. Разность наибольшей и наименьшей вариант выборки называют размахом выборки.

Размах первой выборки равен $10 - 2 = 8$, а второй $10 - 5 = 5$. Размах выборки находят в том случае, когда существенной для исследования является величина разброса данных в ряду. К примеру, в метеорологии важна не только среднесуточная температура, но и численная характеристика колебания температуры воздуха в течение суток, т. е. размах выборки.

Не всегда подсчёт среднего арифметического оказывается полезным для исследования. Так, не имеет смысла находить средний размер обуви, проданной в магазине за день. Важнее знать размер наиболее покупаемой в этот день обуви — так называемую *моду* выборки.

Определение. Варианта выборки, имеющая наибольшую частоту, называется модой выборки.

В примере с изучением результатов тестирования, проведённого в двух седьмых классах, модой и первого, и второго ряда является число 9, которое и в первой, и во второй выборке встречается чаще других.

Если в выборке два числа встречаются с одинаковой частотой, превосходящей частоты остальных вариант, то оба эти числа являются модой для данного ряда. Так, в ряду

2; 3; 3; 3; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 8; 8

две моды — это числа 3 и 6. Может случиться, что в выборке будет более двух мод или не будет моды совсем. Например, ряд

2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5

не имеет моды.

Рассмотрим ещё один пример. Сотрудники лаборатории приобрели акции одного предприятия. Количество акций, приобретённых сотрудниками, оказалось пропорциональным числам:

2; 3; 5; 6; 8; 9; 51.

Каково среднее количество акций, приобретённых сотрудниками?

Данный ряд не имеет моды. Среднее арифметическое ряда:

$$\frac{2+5+9+3+8+6+51}{7}=\frac{84}{7}=12.$$

Но это число не отражает реальной ситуации с распределением акций между сотрудниками, поскольку оно больше шести из семи вариант ряда. Для оценки средней величины составим упорядоченный ряд и найдём ту варианту, которая записана в середине ряда:

2; 3; 5; **6**; 8; 9; 51.

Эту варианту называют *медианой* ряда. Найденное значение лишь приближённо характеризует средний показатель ряда, но эта характеристика ближе к действительности.

Если упорядоченный ряд имеет чётное число вариант, то в качестве медианы рассматривают среднее арифметическое двух средних чисел. Например, медианой ряда

3; 3; 4; 5; **5**; **6**; 6; 7; 7; 40

является среднее арифметическое чисел 5 и 6, т. е. $\frac{5+6}{2}=5{,}5$.

Определение. Если в упорядоченном ряду данных нечётное число вариант, то средняя по счёту варианта называется медианой. Если в упорядоченном ряду чётное число вариант, то медианой называется среднее арифметическое двух средних по счёту вариант.

Пример с акциями иногда решают, отбрасывая нетипичную для ряда данных варианту. В таком случае в ряду

2; 3; 5; 6; 8; 9

среднее арифметическое будет равно 5,5. Так же поступают при оценивании выступления спортсменов: для большей объективности результатов из совокупности баллов каждого спортсмена выбрасывают самую низкую и самую высокую оценки судей.

Пример. Во время соревнований по стрельбе спортсмен набрал следующее количество очков:

$$9;\ 9;\ 8;\ 10;\ 8;\ 7;\ 9;\ 10;\ 8;\ 7.$$

Найдём: а) объём выборки; б) среднее арифметическое выборки; в) размах; г) моду; д) медиану ряда данных.

Для решения задачи запишем упорядоченный ряд данных:

$$7;\ 7;\ 8;\ 8;\ 8;\ 9;\ 9;\ 9;\ 10;\ 10.$$

а) Спортсмен сделал 10 выстрелов, значит, объём выборки равен 10.

б) Найдём среднее арифметическое выборки:

$$\frac{7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2}{10} = 8{,}5.$$

в) Размах ряда равен $10 - 7 = 3$.

г) У данного ряда две моды: 8 и 9.

д) Найдём медиану выборки. Данный ряд содержит чётное число вариант. Найдём среднее арифметическое двух чисел, записанных в середине ряда: $\frac{8+9}{2} = 8{,}5$. Медианой выборки является число 8,5.

В учебниках по статистике моду, медиану и среднее арифметическое иногда объединяют одним термином — *меры центральной тенденции* (или, короче, *центральные тенденции*), подчеркивая тем самым возможность охарактеризовать ряд данных одним числом, вокруг которого группируются все его значения.

Упражнения

61. Найдите объём, среднее арифметическое, размах, моду и медиану выборки:

а) 13; 12; 10; 12; 10; 14; 13; 10;

б) 0; 1; 1; 1; −1; 0; 1; 0;

в) −5; −7; 3; −1; 0; 2; 1; −3;

г) 117; 121; 121; 121; 121.

62. Пшеницей засеяно три поля, площади которых равны 10 га, 12 га и 4 га. Средняя урожайность на первом поле составляет 18 ц с 1 га, на втором — 18,5 ц с 1 га, на третьем — 23,5 ц с 1 га. Какова средняя урожайность пшеницы, собранной с трёх полей? Какая из статистических характеристик найдена?

63. Как изменятся размах, мода и среднее арифметическое выборки, если:

а) к ней добавить наименьшую варианту;

б) к ней добавить наибольшую варианту;

в) вычеркнуть из неё наименьшую варианту;
г) вычеркнуть из неё наибольшую варианту?

64. Среднее арифметическое выборки из десяти элементов равно 22. К выборке добавили варианту 11. Чему равно среднее арифметическое новой выборки?

65. Среднее арифметическое выборки из 16 чисел равно 218. Из выборки вычеркнули варианту 338. Чему равно среднее арифметическое получившейся выборки?

66. Среднее арифметическое выборки из 12 элементов равно 15. В эту выборку добавили ещё одно число, после чего среднее арифметическое стало равно 14. Какое число добавили?

67. У троих друзей-семиклассников: Андрея, Бориса и Василия — к концу первой четверти по алгебре оказались следующие отметки:
Андрей: 5; 4; 4; 3; 5; 4; 5; 5; 4; 3; 5; 5;
Борис: 3; 3; 2; 3; 4; 4; 4; 3; 3; 2; 4; 4;
Василий: 5; 5; 5; 4; 5; 5; 5; 4; 4; 5; 5; 5.
а) Запишите ряд данных для каждого ученика.
б) Какой средний балл имеет к концу четверти каждый ученик?
в) Какова наиболее типичная отметка каждого из них?
г) Какова средняя варианта (медиана) каждого ряда? Какую отметку вероятнее всего получит каждый из друзей за четверть?

68. В выборке 12; 14; 15; 17; 17; 18 одна варианта пропущена. Найдите её, если известно, что:
а) среднее арифметическое выборки равно 15;
б) размах ряда данных равен 8;
в) размах ряда равен 7, а среднее арифметическое выражается целым числом.

69. Учащиеся 7 класса провели 20 экспериментов по подбрасыванию игральной кости. Отмечая число выпавших очков, они получили следующие данные:

3; 4; 1; 6; 6; 2; 1; 2; 4; 5; 6; 2; 3; 6; 4; 4; 1; 2; 5; 3.

Составьте упорядоченный ряд данных и представьте его в виде таблицы частот. Найдите среднее арифметическое, размах, моду и медиану упорядоченного ряда данных.

70. Результаты статистического исследования были записаны в виде таблицы частот, но одна из вариант была утрачена.

Варианта	8	11	
Частота	4	6	4

Восстановите утраченную в таблице варианту, если известно, что среднее арифметическое выборки равно 10. Каковы объём, мода, размах и медиана этой выборки?

71. Результаты проверки скорости чтения семиклассников (количество слов в минуту) записаны в таблицу частот (скорость чтения ученика округлялась до десятков).

Скорость чтения	100	110	120	130	140
Число учащихся	3	6	7	5	4

По таблице найдите: а) число учащихся в классе; б) типичную для учащихся класса скорость чтения; в) величину разброса результатов; г) среднюю скорость чтения. Какие статистические характеристики использовались для ответа на вопросы?

Упражнения для повторения

72. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):7\frac{1}{24}}$; б) $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$.

73. Расстояние между машинами, движущимися по шоссе, равно 100 км. Скорости машин равны 75 км/ч и 90 км/ч. Чему может быть равно расстояние между ними через 1,2 ч?

74. Сравните числа:

а) $\frac{1}{3}$ и 0,5; б) $-0{,}7$ и $-\frac{7}{11}$.

5. Выражения с переменными

Рассмотрим две задачи.

Задача 1. Завод ежедневно перерабатывает 5 т молока. Сколько тонн молока переработает завод за p дней?

Задача 2. Ширина прямоугольника равна 5 см, а длина — p см. Какова площадь этого прямоугольника?

Решение каждой из этих задач приводит к одному и тому же выражению $5p$, значение которого зависит от значений p. Если $p = 1$, то $5p = 5$; если $p = 2$, то $5p = 10$ и т. д. С изменением значений p изменяется и значение выражения $5p$.

Букву p в этом выражении называют *переменной*, а само выражение $5p$ — *выражением с переменной*.

В первой задаче переменная может принимать лишь натуральные значения, во второй — любые положительные, в том числе и дробные.

Если же мы будем рассматривать выражение $5p$, никак не связанное с конкретной задачей, то в этом случае переменная p может принимать любые значения (целые и дробные, положительные и отрицательные).

Для записи значений выражения при различных значениях переменной часто используют таблицы. Так, значения выражения $5p$ при всех натуральных p, не превышающих 6, будут записаны в таблице:

p	1	2	3	4	5	6
5p	5	10	15	20	25	30

Подобные таблицы использовались ещё в Древнем Вавилоне: на глиняных табличках, относящихся к XVIII в. до н. э., приводятся таблицы для вычисления значений выражений n^2, n^3, $\frac{1}{n}$ и др.

Мы рассмотрели случай, когда выражение содержало одну переменную. Выражение может содержать две, три и более переменных. Например, выражение $x - 5y$ содержит две переменные: x и y. Его значение зависит как от значений переменной x, так и от значений переменной y. Если $x = 8$ и $y = 1$, то $x - 5y = 3$, если $x = 0$ и $y = \frac{1}{5}$, то $x - 5y = -1$ и т. д.

Для записи значений выражения с двумя переменными используют таблицу с двумя входами. Например, значения выражения $2x - 3y$, где x и y принимают значения 1, 2, 3 и 4, можно записать в таблицу:

x \ y	**1**	**2**	**3**	**4**
1	−1	−4	−7	−10
2	1	−2	−5	−8
3	3	0	−3	−6
4	5	2	−1	−4

Таблицей с двумя входами является таблица квадратов натуральных чисел, приведённая на форзаце в конце учебника.

Рассмотрим выражение $\frac{a}{a-5}$. При любом $a \neq 5$ оно принимает определённое значение. При $a = 5$ оно теряет смысл, так как мы получаем числовое выражение $\frac{5}{0}$, в котором делитель равен нулю. Поэтому говорят, что при $a = 5$ выражение $\frac{a}{a-5}$ *не имеет смысла*, а при любом $a \neq 5$ оно *имеет смысл*. Множество всех чисел, при которых выражение с переменной имеет смысл, называют *множеством допустимых значений переменной* или *областью допустимых значений переменной*.

Выражения с переменными применяются для записи чисел определённого вида. Приведём примеры.

Любое чётное натуральное число можно представить выражением вида $2n$, где $n \in N$. Действительно, если мы будем вместо n последовательно подставлять числа 1, 2, 3 и т. д., то получим последовательность чётных чисел: 2, 4, 6, ...

Всякое натуральное число, дающее при делении на 3 в остатке 2, можно записать так: $3n + 2$, где n — целое неотрицательное число.

Всякое двузначное число, записанное в десятичной позиционной системе счисления, можно записать в виде $10a + b$, где a — цифра десятков, причём $a \neq 0$, а b — цифра единиц. Для записи таких чисел используется выражение $\overline{ab}$. Аналогично, используя переменные a, b и c, можно записать трёхзначное число в виде $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, где $a \neq 0$.

Трёхзначное число $\overline{abc}_{(n)}$ в позиционной системе счисления с основанием n можно записать в виде $\overline{abc}_{(n)} = n^2a + nb + c$, где $a \neq 0$. Например, трёхзначное число $\overline{abc}_{(2)}$, записанное в двоичной системе счисления можно представить в виде $4a + 2b + c$. В непозиционных системах счисления (таких, например, как римская нумерация) для записи чисел выражения с переменными, как правило, не используются.

Выражения с переменными используются также для записи равенств и неравенств, содержащих переменные. Например, предложение «Сумма двух чисел равна 50» можно записать в виде равенства $x + y = 50$, в котором буквой x обозначено первое число, а буквой y — второе. Предложение «В автобусе едет не более 20 человек» можно записать в виде неравенства $x \leqslant 20$ (читают: «икс меньше или равно двадцати»), где буквой x обозначено число пассажиров. Запись $x \leqslant 20$ означает, что $x < 20$ или $x = 20$.

Франсуа Виет (1540—1603), французский математик, по профессии юрист; ввёл в алгебру буквенную символику, что позволило рассматривать общие методы решения уравнений.

Неравенства, составленные с помощью знаков < и >, называются *строгими*, а неравенства, составленные с помощью знаков $\leqslant$ и $\geqslant$ — *нестрогими*.

С помощью выражений с переменными и неравенств запишем определение модуля числа:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases} \text{ или короче: } |a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Упражнения

75. Запишите в виде выражения:
а) сумму удвоенного произведения чисел a и b и числа 1;
б) разность утроенного произведения чисел b и c и числа 5;
в) произведение суммы чисел a и x и их разности;
г) частное числа x и суммы чисел a и b.

76. Пользуясь терминами «сумма», «разность», «произведение» и «частное», прочитайте выражение:

а) $xy + 8$; в) $\frac{a+b}{c}$; д) $(m - 5) \cdot (m + 5)$;
б) $(x + 10)y$; г) $2a - 3b$; е) $\frac{p}{q} + \frac{c}{d}$.

77. Запишите в виде равенства предложение:
а) сумма чисел x и 15 равна 36;
б) разность числа x и числа 27 равна 19;
в) число x больше 9 на 7;
г) число x меньше 18 на 3.

78. Запишите в виде равенства предложение:
а) произведение чисел 25 и y равно 400;
б) число y больше числа 8 на 14;
в) число y больше числа 9 в 5 раз;
г) число y меньше числа 375 в 3 раза.

79. Найдите значение выражения:
а) $(2a + 5)(2a - 5)$ при $a = -1{,}5;\ 2{,}5;\ 4$;
б) $b^2 - 6b + 9$ при $b = -2;\ 0;\ 6$;
в) $|x| + |x - 2|$ при $x = 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2$;
г) $|y - 3| + |y + 3|$ при $y = -6;\ -5;\ 5;\ 6$.

80. Найдите множество значений выражения:
а) $4x - 3$, если $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
б) $3 - 4x$, если $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Какими числами являются соответственные значения выражений $4x - 3$ и $3 - 4x$ (т. е. значения, принимаемые при одинаковых значениях x)?

81. Заполните таблицу, вычислив значения выражений $15 - 3a$ и $3a - 15$ для указанных в верхней строке значений a:

a	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$15 - 3a$									
$3a - 15$									

Какими числами являются соответственные значения этих выражений?

82. Найдите множество значений выражения:

а) $a - |a|$, где $a \in \boldsymbol{Z}$ и $|a| \leqslant 3$;

б) $\frac{|a|}{a} + a$, где $a \in \boldsymbol{Z}$, $a \neq 0$ и $-3 \leqslant a \leqslant 5$.

83. Пусть $y \in \{-5; -2; 2{,}5\}$. Сравните соответственные значения выражений:

а) $20 - 5y$ и $20 + 5y$;

б) $y^2 - 2y$ и $y(y - 2)$;

в) $\frac{y(y-1)}{2}$ и $\frac{2}{y^2 - y}$;

г) $\frac{25}{2y-5}$ и $\frac{2y-5}{25}$.

84. Площадь картофельного поля составляет a га. В первый день картофель убрали с 15% площади поля. С какой площади его предстоит убрать?

85. В магазине было b кг огурцов. Сколько килограммов огурцов осталось в магазине после того, как продали 20% всех огурцов?

86. Тетрадь стоит x р., а авторучка — y р. Купили 15 тетрадей и 2 авторучки. Составьте выражение, определяющее общую стоимость покупки.

87. Сын моложе мамы на b лет и старше сестры на 3 года. На сколько лет мама старше дочери?

88. Найдите значение выражения $0{,}5a + 0{,}6b$, если:

а) $a = 0{,}4$, $b = 0{,}25$;

б) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1\frac{1}{3}$.

89. Вычислите:

а) $(3x - 5)y$, если $x = -1{,}5$, $y = -0{,}9$;

б) $y^2 - 3xy$, если $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$;

в) $ax + 4y$, если $a = 5$, $x = -2$, $y = 10$;

г) $bc - ac$, если $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{6}$, $c = \frac{1}{2}$.

90. Составьте и заполните таблицу с двумя входами, вычислив значения выражения:

а) $a^2 - 2ab + b^2$ при всех целых a и b, удовлетворяющих неравенствам $|a| < 4$ и $|b| < 4$;

б) $(a + b)^2$ при всех целых a и b, удовлетворяющих неравенствам $|a| \leqslant 3$ и $|b| \leqslant 3$.

91. По таблице квадратов натуральных чисел, приведённой на форзаце в конце учебника, найдите значение выражения n^2 при $n = 37$; -39; $4{,}3$; $-8{,}1$.

92. Известно, что при некоторых значениях a и b значение выражения $a - b$ равно 1,2. Какое значение принимает при тех же значениях a и b выражение:

а) $3(a - b)$; б) $b - a$; в) $\frac{12}{a-b}$; г) $\frac{6}{b-a}$?

93. Известно, что при некоторых значениях переменных m и n значение выражения $\frac{m}{n}$ равно 1,2. Какое значение при тех же значениях переменных m и n принимает выражение:

а) $\frac{n}{m}$; б) $-\frac{5m}{3n}$; в) $3 + \frac{2n}{m}$; г) $\frac{3m - 2n}{2m + n}$?

94. На рисунке 4 изображена фигура, для которой указана длина отрезков (в см). Составьте выражение для вычисления её площади (в см^2).

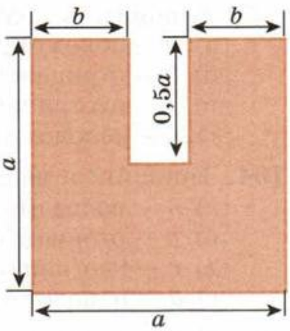


Рис. 4

95. Найдите значение выражения $10a + b$, если:

а) $a = 1$, $b = 3$; в) $a = 4$, $b = 1$;

б) $a = 2$, $b = 7$; г) $a = 5$, $b = 0$.

96. Представьте в виде суммы выражение:

а) $\overline{xyz}$; в) $\overline{abcd}$; д) $\overline{a0b1c}_{(5)}$;

б) $\overline{a0b}$; г) $\overline{abc}_{(5)}$; е) $\overline{xyz}_{(8)}$.

97. Найдите все двузначные числа $\overline{ab}$, если известно, что

а) $\overline{ab} - \overline{ba} = 36$; в) $\overline{ab}_{(3)} + \overline{ba}_{(3)} = 12$;

б) $\overline{ab} + \overline{ba} = 22$; г) $\overline{ab}_{(3)} - \overline{ba}_{(3)} = 2$.

98. Найдите общий вид выражения для записи натурального числа, которое:

а) кратно 3; г) даёт при делении на 4 остаток 2;

б) кратно 5; д) даёт при делении на 5 остаток 4;

в) кратно 11; е) является нечётным.

99. Укажите множество натуральных значений переменной n, при которых значение выражения $14 - n$ является:

а) нечётным числом;
б) чётным числом;
в) простым числом;
г) натуральным числом, кратным 5.

100. Запишите последовательность чисел данного вида, расположив числа в порядке возрастания:

а) $2n + 1$, где $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$;
б) $3n - 1$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и $n < 10$;
в) $10n + 5$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и $n < 7$;
г) $17n - 3$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и $n < 6$.

101. По какому правилу составлена последовательность чисел? Напишите два следующих члена последовательности:

а) 5, 11, 17, 23, 29, 35, ... ;
б) 9, 19, 29, 39, 49, 59, ... ;
в) 17, 14, 11, 8, 5, 2, −1, ... ;
г) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

102. Верно ли неравенство:

а) $5x + 2 < 10x$ при $x = 8; 0; -2$;
б) $3x - 5 > x$ при $x = 1; 0; -4$?

103. Запишите в виде неравенства предложение:

а) a — положительное число;
б) b — отрицательное число;
в) x — неотрицательное число;
г) y — неположительное число.

104. Запишите в виде двойного неравенства предложение:

а) a — положительное число, меньшее 10;
б) b — отрицательное число, большее −5;
в) c — неотрицательное число, меньшее 1;
г) d — неположительное число, большее −7.

105. Найдите множество целых значений x, при которых верно неравенство:

а) $-4 < x < 6$; в) $-3 < x \leqslant -2$;
б) $-2 \leqslant x \leqslant 2$; г) $-4 \leqslant x < 0$.

106. Найдите значения переменной, при которых не имеет смысла выражение:

а) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{24}$; в) $\frac{2x - x^2}{x + 7}$; д) $\frac{55}{2|x| - 5}$;

б) $\frac{2x + 1}{3x}$; г) $\frac{1 - x}{|x| + 1{,}5}$; е) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

107. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $8x + 9$; в) $\frac{2}{x-10}$; д) $\frac{2x}{|x|-3}$;

б) $\frac{35}{x^2}$; г) $\frac{9x}{x+6}$; е) $\frac{x+1}{|x|+2}$?

108. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

а) $\frac{-x+21}{2}$; в) $\frac{2x+x^2}{x-0{,}01}$; д) $\frac{51-3x}{|x|-17}$;

б) $\frac{|x|}{-2x}$; г) $\frac{2x-3}{|2x|+3}$; е) $\frac{3x}{3x^2+13}$.

Упражнения для повторения

109. Найдите значение выражения:

а) $9{,}18 : 4{,}5 + 3{,}1 \cdot 1{,}6$; в) $\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{5}\right)\cdot 3{,}6+1{,}01$;

б) $(8{,}16 - 7{,}48) : 0{,}017$; г) $3\cdot 0{,}125-\left(\frac{4}{9}-\frac{3}{7}\right)\cdot 7\frac{7}{8}$.

110. Расположите в порядке возрастания числа:

$$0{,}38;\ \frac{3}{8};\ \frac{5}{13};\ \frac{4}{11};\ \frac{3}{7}.$$

111. Турист шёл 2 ч со скоростью 4,5 км/ч и 1 ч со скоростью 3 км/ч. Какова средняя скорость туриста на всём участке пути?

112. Какой по счёту вариантой будет медиана, если упорядоченный ряд данных состоит из $2n + 1$ вариант?

? Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример числового выражения, составленного с помощью двух знаков действий, значение которого равно 10.
2. Что называют средним арифметическим, размахом, модой и медианой выборки?
3. Сравните значения выражений $a + 6$ и $6a$ при $a = -2;\ 1{,}2;\ 4$.
4. Запишите в виде выражения произведение суммы чисел x и y и их разности.
5. Найдите общий вид выражения для числа:
   а) кратного 7;
   б) которое при делении на 3 даёт в остатке 1.
6. Что называют областью допустимых значений переменной в выражении с переменной? Найдите область допустимых значений в выражении $\frac{x^2+4}{x-4}$.

Дополнительные упражнения к главе 1

К параграфу 1

113. Запишите с помощью перечисления элементов множество натуральных чисел, меньших 30, которые:

а) кратны 2 и кратны 3;
б) кратны 2 и кратны 5;
в) кратны 2 или кратны 3;
г) кратны 2 или кратны 5.

114. Какие из множеств:

$$A = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ -5 < x < 5\};$$
$$B = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ x > -4 \text{ и } x < 4\};$$
$$C = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ |x| < 5\};$$
$$D = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z},\ x^2 < 16\} \text{ —}$$

являются равными?

115. В трёхзначном числе a — цифра сотен, b — цифра десятков, c — цифра единиц. Запишите с помощью перечисления элементов множество трёхзначных чисел, у которых:

а) $a + b + c = 5$;
б) $abc = 6$.

116. Запишите множество дробей вида $\frac{n}{n+1}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, если:

а) $n < 10$;
б) $5 < n < 11$;
в) $n < 16$ и n — нечётное число.

117. Пусть P — множество натуральных чисел, больших 1, но меньших 20, которые не кратны числам 2 и 3. Задайте это множество перечислением элементов.

118. Задайте перечислением элементов множество десятичных дробей, меньших 1, в записи которых используются лишь цифры 3 и 7, причём:

а) цифра 3 используется два раза, а цифра 7 — один раз;
б) цифра 3 используется три раза, а цифра 7 — два раза.

119. Пусть B — множество правильных обыкновенных дробей со знаменателем 13. Найдите подмножество множества B, в котором каждый элемент является числом:

а) меньшим $\frac{1}{2}$; в) меньшим 0,1;
б) большим $\frac{2}{3}$; г) большим 0,8.

120. Из множества трёхзначных чисел выделите подмножество чисел:

а) кратных 111;

б) кратных 37 и оканчивающихся цифрой 8;

в) кратных 37 и оканчивающихся нулём;

г) оканчивающихся цифрой 2, причём сумма их цифр равна 17;

д) начинающихся с цифры 7, причём сумма их цифр равна 21;

е) первые две цифры которых образуют число, кратное 23, а две последние цифры образуют число, являющееся квадратом натурального числа.

121. По какому признаку из множества двузначных чисел выделено его подмножество:

а) {11; 13; 17; 19; 23; 29};

б) {16; 25; 34; 43; 52; 61; 70};

в) {50; 61; 72; 83; 94};

г) {21; 42; 63; 84}?

Сформулируйте и запишите соответствующий признак для каждого из указанных множеств.

122. По какому признаку из множества дробей выделено его подмножество:

а) $\left\{\frac{2}{3}; \frac{2}{5}; \frac{2}{7}; \frac{2}{9}; \frac{2}{11}; \frac{2}{13}; \frac{2}{15}; \frac{2}{17}; \frac{2}{19}\right\}$;

б) $\left\{\frac{1}{8}; \frac{2}{7}; \frac{3}{6}; \frac{4}{5}; \frac{5}{4}; \frac{6}{3}; \frac{7}{2}\right\}$;

в) $\left\{\frac{1}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{7}; \frac{7}{9}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \frac{3}{7}; \frac{5}{9}\right\}$;

г) $\left\{\frac{1}{21}; \frac{3}{7}; \frac{7}{3}\right\}$?

Сформулируйте и запишите соответствующий признак для каждого из указанных множеств.

К параграфу 2

123. Вычислите:

а) $5\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{9} - 4\frac{4}{7} \cdot 1\frac{3}{4}$;

в) $2\frac{1}{3} : \left(2 - 17\frac{1}{3} : 13\right)$;

б) $7\frac{1}{3} : 1\frac{2}{9} + 4\frac{8}{9} \cdot \frac{9}{11}$;

г) $\left(3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{7}{9} - 3\right) : \frac{3}{5}$.

124. Найдите значение выражения:

а) $2\frac{2}{3} : 1\frac{7}{9} + \frac{55}{84} : \left(\frac{43}{63} - \frac{23}{36}\right)$;

б) $5\frac{5}{7} : \frac{8}{21} + 1\frac{8}{13} \cdot \left(\frac{43}{56} - \frac{11}{24}\right)$.

125. Найдите число, противоположное:

а) сумме чисел $-3{,}76$ и $2{,}16$;

б) разности чисел $1\frac{1}{5}$ и $-1{,}8$;

в) произведению чисел $\frac{1}{4}$ и 7;

г) частному чисел $22{,}5$ и $-1\frac{1}{2}$.

126. Найдите число, обратное значению выражения:

а) $\left(2\frac{5}{8}+1{,}75\right)\cdot 1{,}6$;

б) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{18}\right):\frac{7}{12}$.

127. Пусть a — некоторое число. Найдите число:
а) которое на 6 больше числа, ему противоположного;
б) которое в 4 раза больше числа, ему обратного.

128. Известно, что уменьшаемое в 3 раза больше разности. Во сколько раз вычитаемое больше разности?

129. Данное число увеличили в 1,5 раза. На сколько процентов увеличилось данное число?

130. Данное число уменьшили в 5 раз. На сколько процентов уменьшилось данное число?

131. Во сколько раз увеличится двузначное число, если к нему приписать справа те же цифры и в том же порядке?

132. Найдите сумму всех целых чисел от -105 до 106.

133. Найдите произведение всех целых чисел от -15 до 16.

134. Найдите значение выражения:

а) $\underbrace{777...7}_{100\text{ раз}}+\underbrace{222...2}_{100\text{ раз}}$;   б) $\underbrace{555...5}_{100\text{ раз}}+\underbrace{888...8}_{100\text{ раз}}$.

135. Найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+...+\frac{1}{18\cdot 19}+\frac{1}{19\cdot 20}$;

б) $\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 15}+...+\frac{1}{21\cdot 23}+\frac{1}{23\cdot 25}$.

136. Не выполняя вычислений, сравните значения выражений:
а) $1{,}48\cdot 1{,}7$ и $1{,}48 : 1{,}7$;
б) $3{,}876\cdot 0{,}34$ и $3{,}876 : 0{,}34$;
в) $0{,}835\cdot(-2{,}3)$ и $0{,}835 : (-2{,}3)$;
г) $-7{,}118\cdot 2{,}37$ и $-7{,}118 : 2{,}37$.

137. Среди учащихся 7 класса провели опрос: сколько времени (в ч) ежедневно (в среднем) они тратят на выполнение домашних заданий? Были получены следующие данные:

2,5; 2,5; 3; 3; 3; 1,5; 2; 4; 2,5; 3; 3; 3; 3,5; 2; 3,5; 1,5;
4; 4; 3; 3; 3; 1,5; 3; 3,5; 2; 2,5; 4; 2; 4; 1,5; 3,5; 2.

Составьте упорядоченный ряд данных опроса семиклассников. Постройте таблицу частот. Найдите размах, среднее арифметическое, моду и медиану ряда данных.

138. Найдите среднее арифметическое, размах, моду и медиану выборки:

а) 77; 79; 81; 83, 77; 80;

б) -13; -11; -5; -5; -9; -11; -9; -12; -4.

139. Результаты измерений записаны в таблицу частот, но одно из данных неизвестно.

Варианта	8	10	11
Частота		3	5

Найдите пропущенное в таблице число, если известно, что среднее арифметическое выборки равно 9,4. Найдите объём, моду, размах и медиану этой выборки.

140. Найдите значение выражения $\frac{4x-15}{x-3}$ при:

а) $x = 1{,}5$; в) $x = -1{,}2$;
б) $x = 3{,}6$; г) $x = 0{,}03$.

141. При каких $n \in N$ верно предложение:

а) $19 - n$ — натуральное число, кратное 3;

б) $9n + 1$ — число, кратное 11;

в) $(n - 1)(n + 3)$ — простое число;

г) $n + 7 < 17$;

д) $15 - n > 9$;

е) $n(n + 1)(n + 2) = 120$;

ж) $\frac{n}{n+7} < \frac{7}{9}$;

з) $\frac{3}{8} = \frac{1}{2}(n - 4)$?

142. Запишите последовательность чисел вида:

а) $\frac{1}{2n}$, где $n \in N$ и $n \leqslant 8$;

б) $\frac{1}{n(n+1)}$, где $n \in N$ и $n \leqslant 6$;

в) $\frac{2n-1}{2n+1}$, где $n \in N$ и $n < 7$;

г) $\frac{n^2}{n^2+1}$, где $n \in N$ и $n < 4$.

143. По какому признаку составлена последовательность:

а) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}$;

б) $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \frac{1}{17}$;

в) $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{9}$;

г) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$;

д) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}$;

е) $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \frac{2}{13}$?

Сформулируйте и запишите соответствующий признак для каждой последовательности. Напишите два следующих числа каждой последовательности.

144. В школе древнегреческого учёного Пифагора Самосского (VI в. до н. э.) числа изображали с помощью камешков, разложенных на песке. (Именно от пифагорейцев римлянам перешла любовь к счёту таким способом. На латинском языке слово «камешек» — это *calculus*, отсюда происходят слова «калькулятор», «калькуляция».) Благодаря такому представлению чисел появились *фигурные числа*: треугольные, квадратные, пятиугольные и т. д. На рисунке 5 изображены треугольные числа 3, 6 и 10. Изобразите следующее треугольное число и найдите, чему оно равно. Изобразите первые три квадратных числа. Чему они равны?

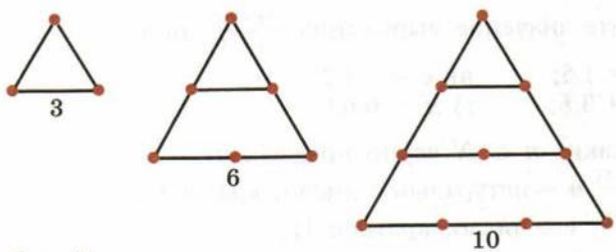


Рис. 5

Пифагор Самосский (около 570 — около 500 г. до н. э.), основатель научно-философской школы, в которой обязательными были занятия геометрией, арифметикой, астрономией и музыкой.

145. Найдите множество чисел вида $\overline{abc}$, если:

а) $a - b = 5$, $c = 2$;
б) $a + b = 4$, $c = 7$;
в) $a = 3$, $b - c = 6$;
г) $ab = 6$, $bc = 3$.

146. Найдите все двузначные числа $\overline{ab}$, если известно, что:

а) $\overline{ab} + \overline{ba} = 77$;

б) $\overline{ab} + \overline{ba} = 121$;

в) $\overline{ab}_{(5)} + \overline{ba}_{(5)} = 18$;

г) $\overline{ab}_{(4)} - \overline{ba}_{(4)} = 6$.

147. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

а) $\frac{t+1}{t-1}$;   в) $\frac{2t+7}{t^2}$;

б) $\frac{t-1}{4-t}$;   г) $\frac{3t^2-7}{|t|-t}$.

148. Известно, что a — отрицательное число. Какие из чисел

$$2a;\ \ a - 1;\ \ a^2;\ -\frac{1}{a}$$

являются положительными?

149. Известно, что p — нечётное число. Какие из чисел

$$p + 1;\ \ p + 2;\ \ p^2;\ \ 2p;\ \ p^2 + p$$

являются чётными?

150. Составьте выражение для вычисления суммы $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$, используя представление каждого из слагаемых в виде разности двух дробей.

151. Периметр прямоугольника равен 12 см, а одна из его сторон равна a см. Запишите выражение для вычисления площади прямоугольника.

152. Сумма трёх последовательных нечётных чисел равна m. Чему равна сумма трёх последовательных чисел, следующих за наибольшим из трёх данных, если эти числа:

а) нечётные;   б) чётные?

153. Из городов A и B, расстояние между которыми 230 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Скорость одного из них v_1 км/ч, скорость другого v_2 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

154. Автобус и автомобиль движутся в одном направлении. Автобус впереди автомобиля на 30 км. Скорость автобуса v_1 км/ч, а автомобиля v_2 км/ч, причём $v_1 < v_2$. Через какое время автомобиль догонит автобус?

155. Альбом стоил a р., а набор цветных карандашей — b р. После повышения цен стоимость альбома возросла на 5%, а цветных карандашей — на 3%. В какую сумму обойдётся покупка двух альбомов и одного набора цветных карандашей после повышения цен?

156. Банк ежегодно выплачивает вкладчикам $n\%$ от вложенной суммы. Какая сумма будет у вкладчика, положившего в банк 1000 р.:

а) через год; б) через два года?

Глава 2 Одночлены

В этой главе вы познакомитесь с понятием степени с натуральным показателем, докажете некоторые свойства степеней. Этот материал позволит ввести понятие одночлена, степени одночлена, научиться выполнять действия с одночленами. Здесь же будет рассмотрено понятие тождества, необходимое для последующего изучения алгебры.

§ 3. Степень с натуральным показателем

6. Определение степени с натуральным показателем

Произведение $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ записывают короче: 7^5. Выражение вида 7^5 называют пятой степенью числа 7 (читают: «семь в пятой степени»). В записи 7^5 число 7, которое означает повторяющийся множитель, называют основанием степени, а число 5, показывающее, сколько раз этот множитель повторяется, называют показателем степени.

Умножим 7^5 на 7^3:

$$7^5 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = \\ = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^8.$$

Показатель степени увеличился на 3.

Умножим теперь 7^5 на 7:

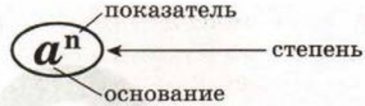
$$7^5 \cdot 7 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot 7 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6.$$

В этом случае показатель степени увеличился на 1. Поэтому естественно считать, что $7 = 7^1$. Вообще, первой степенью числа является само число. Например, $18^1 = 18$, $104^1 = 104$.

Определение. Степенью числа a с натуральным показателем n, бо́льшим 1, называют выражение a^n, равное произведению n множителей, каждый из которых равен a.
Степенью числа a с показателем 1 называют выражение a^1, равное a.

По определению $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, где $n \in N$.

В выражении a^n число a называют *основанием степени*, а число n — *показателем степени*.



Запись a^n читается так: «a в степени n» или «n-я степень числа a».

Для второй и третьей степеней числа используют специальные названия: вторую степень числа называют *квадратом*, а третью степень — *кубом*.

Нахождение n-й степени числа a называют *возведением в n-ю степень*.

Пример 1. Возведём число –3 в четвёртую и пятую степени.

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81;$$
$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243.$$

Из свойств умножения следует, что:

при возведении нуля в любую степень получается нуль;
при возведении положительного числа в любую степень получается положительное число;
при возведении отрицательного числа в степень с чётным показателем получается положительное число, а при возведении отрицательного числа в степень с нечётным показателем — отрицательное число.

При вычислении значений числовых выражений, не содержащих скобки, принят следующий порядок действий: сначала выполняют возведение в степень, затем умножение и деление, далее сложение и вычитание.

Пример 2. Найдём значение выражения

$$-6^2 + 64 : (-2)^5.$$

Последовательно находим:

1) $6^2 = 36$; 3) $64 : (-32) = -2$;
2) $(-2)^5 = -32$; 4) $-36 + (-2) = -38$.

Пример 3. Найдём множество значений выражения

$$5 \cdot (-1)^{n+1} + 2, \text{ где } n \in N.$$

Если n — нечётное число, то $(-1)^{n+1} = 1$; тогда

$$5 \cdot (-1)^{n+1} + 2 = 5 \cdot 1 + 2 = 7.$$

Если n — чётное число, то $(-1)^{n+1} = -1$; тогда

$$5 \cdot (-1)^{n+1} + 2 = 5 \cdot (-1) + 2 = -5 + 2 = -3.$$

Множество значений данного выражения: $\{-3; 7\}$.

В рассмотренном примере было указано, что $n \in N$. Условимся в дальнейшем такое указание опускать и считать, что если показатель степени содержит переменную, то значениями этой переменной являются натуральные числа.

С помощью степени с натуральным показателем можно записать любое число в позиционной системе счисления с основанием n. Так, число, состоящее из k цифр, можно записать в виде суммы

$$\overline{abc...xyz}_{(n)} = n^{k-1}a + n^{k-2}b + n^{k-3}c + ... + n^2x + ny + z, \text{ где } a \neq 0.$$

Степень с натуральным показателем широко используется для вычислений различных характеристик. Например, в статистике, для того чтобы узнать, как числа некоторой выборки расположены по отношению к среднему арифметическому этой выборки, используют отклонения, их квадраты и среднее арифметическое квадратов отклонений — *дисперсию*.

Пример 4. Дана выборка: 4; 6; 7; 8; 10. Среднее арифметическое этой выборки равно 7. Тогда отклонения вариант данной выборки от среднего арифметического равны: $4 - 7 = -3$, $6 - 7 = -1$, $7 - 7 = 0$, $8 - 7 = 1$, $10 - 7 = 3$, т. е. мы получили ещё один набор чисел — отклонения каждой варианты выборки от среднего арифметического. По новой выборке (–3; –1; 0; 1; 3) можно судить о том, насколько близки к среднему арифметическому числа исходного набора. Но поскольку сумма отклонений равна нулю, то и среднее арифметическое этой новой выборки также равно нулю. Поэтому для дальнейших исследований исходного набора находят квадраты отклонений и их среднее арифметическое:

$$\frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2}{5} = 4.$$

Полученное число и есть дисперсия исходной выборки.

Упражнения

157. Представьте произведение в виде степени:

а) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
б) $\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)$;
в) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3}_{100 \text{ раз}}$;
г) $(9y) \cdot (9y) \cdot (9y) \cdot (9y) \cdot (9y)$;
д) $(2a - 3b) \cdot (2a - 3b)$;
е) $\underbrace{(-c) \cdot (-c) \cdot ... \cdot (-c)}_{n \text{ раз}}$.

158. Укажите основание и показатель степени и представьте степень в виде произведения:

а) 201^4;
б) $(-0,1)^5$;
в) $(3a)^3$;
г) $(-b^6)^2$;
д) $(a + 2b)^5$;
е) $(x - 3y - 1)^3$.

159. Выполните возведение в степень:

а) 3^4;
б) $(-2)^5$;
в) $2,7^2$;
г) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$;
д) $(-0,2)^4$;
е) $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$;
ж) $(-1)^{2n}$;
з) $(-1)^{4n+3}$.

160. Найдите дисперсию выборки из упражнения 61.

161. Расположите в порядке возрастания числа: 22, 2, 2^{22}, 2^2, 2222.

162. Вычислите значение выражения:

а) $0{,}5 \cdot 3^3$; г) $-1{,}5 \cdot (-6)^2$;
б) $-1{,}2 \cdot 4^2$; д) $1{,}009 + (-0{,}2)^4$;
в) $-0{,}03 \cdot 2^4$; е) $-2{,}007 + (-0{,}1)^3$.

163. Выполните действия:

а) $0{,}75 \cdot (-1)^{14} + (-1)^{75}$; в) $-0{,}2^3 - 3{,}002 \cdot (-1)^8$;
б) $8{,}1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4 - 1{,}05$; г) $\left(-0{,}6 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot (-0{,}1)^3$.

164. В саду росло $63_{(n)}$ фруктовых дерева, из которых $30_{(n)}$ яблонь, $21_{(n)}$ груша, $5_{(n)}$ слив и $4_{(n)}$ вишни. Определите, в какой системе счисления вёлся счёт и сколько было деревьев, если считать их в десятичной системе счисления.

165. Какой цифрой оканчивается значение выражения:

а) 381^4; в) $75^5 - 21^4$; д) $27^2 + 31^6 + 75^4$;
б) 1546^5; г) $61^6 + 30^7$; е) $56^3 - 44^2 + 98^2$?

166. Какой цифрой оканчивается:

а) сумма кубов чисел 381 и 516;
б) разность пятых степеней чисел 1715 и 671;
в) четвёртая степень суммы чисел 18 004 и 17 687;
г) седьмая степень разности чисел 12 778 и 10 513?

167. Сравните с нулём значение выражения:

а) $(-0{,}3)^{100} \cdot (-5)^4$; г) $(-0{,}8)^5 + (-0{,}3)^7$;
б) $-2^8 \cdot (-3)^{11}$; д) $-7^4 + (-4)^5$;
в) $-(-4)^9 \cdot 6^{10}$; е) $(-1{,}2)^6 - (-3)^{11}$.

168. Сравните значения выражений:

а) $7{,}1^{15}$ и $7{,}1^{16}$; в) $-8{,}4^3$ и $-8{,}4^4$;
б) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{11}$ и $-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$; г) $-\left(\frac{4}{7}\right)^{10}$ и $\left(-\frac{4}{7}\right)^{11}$.

169. Найдите значение выражения:

а) $-a^4 + 2a^2 - 1$ при $a = -3$; 0; 2;
б) $-2b^4 + b^3 - 0{,}5b$ при $b = -1$; 0; 4;
в) $-x^3 + 0{,}1x^2 - x$ при $x = -1$; 0; 5;
г) $0{,}5y^3 - 0{,}2y^2 + 0{,}4$ при $y = -2$; 0; 1.

170. Вычислите значение выражения:

а) $0{,}3 \cdot 2^n - 0{,}5 \cdot 2^{n+1} - 15{,}6$ при $n = 5$;
б) $0{,}8 \cdot 3^{n+1} - (0{,}2 \cdot 3)^{n-1} - 2 \cdot 3^n$ при $n = 3$;
в) $0{,}7 \cdot 2^{n+1} + (0{,}5 \cdot 2)^{2n+9} - 0{,}4 \cdot 2^{2n+1}$ при $n = 2$.

171. Составьте формулу для вычисления площади поверхности S куба, ребро которого равно a. Пользуясь этой формулой, найдите S, если a равно:

а) 6 см; б) 1,5 дм.

172. Брус составлен из пяти одинаковых кубов, ребро каждого из которых равно a см. Запишите формулы для вычисления объёма V (в см^3) и площади поверхности S (в см^2) бруса. Пользуясь этими формулами, найдите V и S, если:

а) $a = 4$; б) $a = 12$.

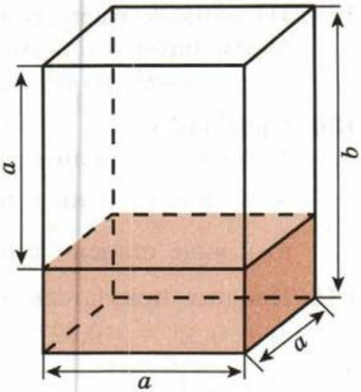


Рис. 6

173. Основанием прямоугольного параллелепипеда (рис. 6) служит квадрат, сторона которого равна a см. Высота параллелепипеда равна b см ($b > a$). От этого параллелепипеда отрезали куб, ребро которого равно a см. Составьте формулу для вычисления объёма V (в см^3) оставшейся части. Найдите V, если $a = 2$, $b = 4{,}6$.

174. Найдите значение выражения:

а) $-a^2 - b^2$ при $a = 0{,}1$, $b = -0{,}5$;
б) $-(a + b)^2$ при $a = 0{,}7$, $b = -0{,}9$;
в) $-a^2 - b^2 + (a - b)^3$ при $a = 6$, $b = -2$;
г) $-(a + b)^2 + (-a)^3 - b^4$ при $a = 7$, $b = -9$;
д) $-x^3 + xy - y^2$ при $x = 4$, $y = -3$;
е) $-4x^4 + y^2 - (x + y)^2$ при $x = 2$, $y = -6$.

175. Найдите значение выражения:

а) $(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} + (-1)^n + (-1)^{n+1}$, где $n > 2$;
б) $(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n+3} \cdot (-1)^{n+4}$, где $n > 1$.

176. Даны выражения:

$$(-1{,}6)^n,\ 8{,}4^n,\ (-3)^{2n},\ (-5)^{n+2},\ (-1{,}8)^{4n},\ (-3)^{n+1}.$$

Выберите те из них, которые при любом n принимают положительные значения.

177. Найдите множество значений выражения:

а) $(-1)^n$; в) $2 \cdot (-1)^n$; д) $(-1)^n + 1^n$;
б) 0^n; г) $5 \cdot (-1)^n$; е) $(-1)^n + (-1)^{n+1}$.

178. Из данных выражений выберите те, которые при любом значении переменной a принимают положительные значения:

$$a^2,\ a^2 + 1,\ 3 + 6a^2,\ (a + 6)^2,\ a^4 + 8,\ a^6 + a^2.$$

179. Из данных выражений выберите те, которые при любом значении переменной b принимают отрицательные значения:

$$-b^2,\ (-b)^2,\ -b^2-5,\ -(b+1)^2,\ -8-3b^2,\ -2b^2-1.$$

180. Представьте:

а) в виде степени с основанием -2 числа 16; -32; 256;

б) в виде степени с основанием $\frac{1}{3}$ числа $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{243}$; $\frac{1}{81}$;

в) в виде степени с основанием $-0{,}1$ числа 0,01; $-0{,}001$; 0,0001.

181. Найдите показатель p, зная, что:

а) $(-0{,}3)^p = -0{,}027$; в) $(-0{,}2)^p = 0{,}0016$;

б) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^p = 1\frac{7}{9}$; г) $\left(-2\frac{1}{7}\right)^p = 4\frac{29}{49}$.

182. При каком значении переменной n верно равенство:

а) $4^n = 64$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0{,}125$;

б) $(-5)^n = -125$; г) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3n} = 3\frac{3}{8}$?

183. Найдите основание степени a, если известно, что:

а) $a^5 = -32$; в) $a^2 = 1{,}21$; д) $a^6 = 64$;

б) $a^3 = 343$; г) $a^4 = 0{,}0081$; е) $a^3 = -729$.

184. Зная, что $9^4 = 6561$, найдите:

а) $(-9)^4$; б) -9^4; в) 9^5; г) $(-9)^5$.

Упражнения для повторения

185. Задайте с помощью перечисления элементов множество простых двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 7.

186. Сравните значения выражений:

а) $5{,}6 \cdot 4{,}2$ и $6{,}6 \cdot 3{,}2$; б) $2{,}7 \cdot (-0{,}2)$ и $2{,}7 : (-0{,}2)$.

187. Известно, что при некоторых значениях b и c значение выражения $b - c$ равно 1,5. Чему равно при тех же значениях b и c значение выражения:

а) $c - b$; в) $\frac{1}{b-c}$;

б) $(b-c)^2$; г) $\frac{1}{(c-b)^2}$?

188. Вычислите:

а) $0{,}16 - \frac{1}{7} \cdot (0{,}45 - 0{,}87)$; б) $1 - (5{,}16 + 4{,}12) \cdot \frac{1}{8}$.

7. Умножение и деление степеней

Представим произведение степеней a^5 и a^2 в виде степени:

$$a^5 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7.$$

Мы получили степень с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей множителей. Подмеченное свойство выполняется для произведения любых двух степеней с одинаковыми основаниями.

Если a — произвольное число, m и n — любые натуральные числа, то

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Докажем это.

Из определения степени и свойств умножения следует, что

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{aa...a}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{aa...a}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{aa...a}_{m+n \text{ раз}} = a^{m+n}, \text{ т. е. } a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Доказанное свойство называется *основным свойством степени*. Оно распространяется на произведение трёх и более степеней. Это нетрудно показать с помощью таких же рассуждений.

Из основного свойства степени следует правило:

чтобы перемножить степени с одинаковыми основаниями, надо основание оставить тем же, а показатели степеней сложить.

Представим теперь в виде степени частное степеней a^8 и a^3, где $a \neq 0$. Так как $a^3 \cdot a^5 = a^8$, то по определению частного $a^8 : a^3 = a^5$.

Мы получили степень с тем же основанием и показателем, равным разности показателей делимого и делителя. Такое свойство выполняется для частного любых степеней с одинаковыми основаниями, не равными нулю, у которых показатель делимого больше показателя делителя.

Если a — произвольное число, не равное нулю, m и n — любые натуральные числа, причём $m > n$, то

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Докажем это.

Умножим a^{m-n} на a^n, используя основное свойство степени:

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^{m-n+n} = a^m.$$

Значит, по определению частного, $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, $m > n$.

Из доказанного свойства следует правило:

чтобы выполнить деление степеней с одинаковыми основаниями, надо основание оставить тем же, а из показателя делимого вычесть показатель делителя.

Мы рассматривали степени с натуральными показателями. Введём теперь понятие степени с нулевым показателем.

Если бы свойство деления a^m на a^n распространялось на тот случай, когда $m = n$, то мы получили бы, что

$$a^m : a^n = a^{m-m} = a^0, \text{ где } a \neq 0.$$

С другой стороны, если $a \neq 0$, то

$$a^m : a^m = 1.$$

Поэтому считают, что $a^0 = 1$, где $a \neq 0$.

Определение. Степенью числа a, где $a \neq 0$, с нулевым показателем называется выражение a^0, равное 1.

Например, $5^0 = 1$, $(-6{,}3)^0 = 1$.

Выражение 0^0 не имеет смысла.

Доказанные свойства степени распространяются и на степень с нулевым показателем, т. е. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ и $a^m : a^n = a^{m-n}$, если $a \neq 0$, m и n — целые неотрицательные числа, причём для последнего свойства $m \geqslant n$.

Упражнения

189. Представьте в виде степени:

а) $a^3 \cdot a^7$; в) $(-a)^5 \cdot (-a)^7$; д) $y^9 \cdot y \cdot y^{11}$;

б) $y^{10} \cdot y$; г) $(3x)^7 \cdot (3x)^2$; е) $x^6 \cdot x^2 \cdot x^3$.

190. Представьте произведение в виде степени:

а) a^na^2; в) xx^n; д) xx^4x^n;

б) b^7b^n; г) y^3y^{n+2}; е) $a^2a^3a^{n+1}$.

191. Представьте, если возможно, выражение в виде степени:

а) $-y^3 \cdot (-y)^5$; в) $(a - b)^3 \cdot (b - a)^2$;

б) $b^6 \cdot (-b)^{10}$; г) $(x - 2y)^4 - (y - 2x)^5$.

192. Выражение a^8 представьте тремя различными способами в виде произведения двух степеней с основанием a.

193. Сравните значения выражений:

а) $(-1{,}5)^{10} \cdot (-1{,}5)^{13}$ и $(-1{,}5)^8 \cdot (-1{,}5)^{19}$;

б) $(-0{,}75)^{14} \cdot 0{,}75^2$ и $(-0{,}75)^{11} \cdot (-0{,}75)^6$.

194. Замените p степенью с основанием a так, чтобы полученное равенство было верно при любом значении a:

а) $pa^7 = a^9$; в) $ap = a^{18}$;

б) $a^{20}p = a^{24}$; г) $pa = a^{11}$.

195. Представьте в виде степени с основанием 2 выражение:
а) $2^8 \cdot 2^{12}$; в) $2^{11} \cdot 32$; д) $2^{n+4} \cdot 64$;
б) $4 \cdot 2^5$; г) $64 \cdot 8$; е) $8 \cdot 2^{n+1}$.

196. Представьте в виде степени выражение:
а) $7^6 \cdot 343$; в) $729 \cdot 27$; д) $3^{n+5} \cdot 81$;
б) $216 \cdot (-6)^4$; г) $625 \cdot (-25)$; е) $216 \cdot 6^{n+2}$.

197. Представьте частное в виде степени:
а) $a^{15} : a^5$; в) $a^4 : a$; д) $a^n : a^7$, где $n > 7$;
б) $a^{16} : a^9$; г) $a^{12} : a^{11}$; е) $a^9 : a^m$, где $0 < m < 9$.

198. При каких значениях переменной верно равенство:
а) $2^x \cdot 2^{2x} = 64$; в) $5^p = 1$;
б) $3^n \cdot 9 = 81$; г) $\frac{3^a \cdot 3^{a+1}}{27} = 1$?

199. Найдите значение выражения:
а) $10^{34} : 10^{31}$; в) $-1{,}35^7 : 1{,}35^6$; д) $(-0{,}7)^{11} : 0{,}7^{10}$;
б) $41^{15} : 41^{13}$; г) $1{,}2^4 : (-1{,}2)^2$; е) $-8{,}6^{27} : 8{,}6^{25}$.

200. Верно ли неравенство:
а) $17{,}1^9 : 17{,}1^6 > 17{,}1^2$; в) $(-1{,}6)^8 : 1{,}6^5 < 1{,}6^4$;
б) $0{,}2^{11} : 0{,}2^5 > 0{,}2^4$; г) $(-0{,}3)^{15} : (-0{,}3)^8 < 0{,}09$?

201. Вычислите значение дроби:
а) $\frac{3^{15} \cdot 3^4}{3^{17}}$; б) $\frac{6^{11}}{6^8 \cdot 6^2}$; в) $\frac{7^{10} \cdot 7^9}{7^{17}}$; г) $\frac{5^{11} \cdot 125}{5^{12}}$.

202. Найдите значение выражения:
а) $5x^0$ при $x = 16$; в) $5a^0 - a^3$ при $a = 2$;
б) $-3x^0$ при $x = -2$; г) $4a^3 - 2a^0$ при $a = -3$.

203. Сравните значения выражений:
а) $1{,}4^6$ и $1{,}4^0$; в) $2{,}75^3$ и $2{,}75^0$;
б) $0{,}6^4$ и $0{,}6^0$; г) $(-1{,}6)^7$ и $(-1{,}6)^0$.

Упражнения для повторения

204. Задайте с помощью перечисления элементов множество X, если
$$X = \{x \mid x \in Z,\ -4 \leqslant x \leqslant 4\}.$$

205. Найдите значение выражения:
а) $-x^3 + 3x^2y$ при $x = -5$, $y = 0$;
б) $-(x + 4y)^2$ при $x = -4$, $y = 4{,}5$.

206. Известно, что значение выражения $\frac{s}{t}$ равно 1,5. Найдите значение выражения при тех же значениях переменных s и t:
а) $\frac{-2t}{3s} + 1$; б) $\left(\frac{s}{t} - 2{,}5\right)^2 + \frac{t}{s}$; в) $\frac{2t - 3s}{3t + 2s}$; г) $\frac{|t| - s}{|t| + s}$.

207. Составьте выражение по условию задачи.

а) Купили 1 кг 300 г товара по цене a р. за килограмм. Какова стоимость покупки?

б) Туристы шли со скоростью 75 м/мин. Сколько километров они прошли за a ч?

в) Муха летит со скоростью 200 м/мин, а ласточка — со скоростью 60 км/ч. Кто из них пролетит за a мин большее расстояние? На сколько оно больше?

? Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение степени с натуральным показателем. Найдите значение выражения 3^4. Как в выражении 3^4 называется: число 3; число 4?

2. Каким числом (нулём, положительным или отрицательным) является значение выражения a^n, где $n \in N$, если:
а) a равно нулю;
б) a — положительное число;
в) a — отрицательное число и n — чётное число;
г) a — отрицательное число и n — нечётное число?

3. В каком порядке в случае отсутствия скобок выполняются действия при вычислении значения числового выражения, содержащего степени?

Вычислите значение выражения $-5 \cdot (-2)^3 - (-1)^{11}$.

4. Сформулируйте и докажите основное свойство степени. Представьте в виде степени произведение $x^7 \cdot x^3$.

5. Сформулируйте правило деления степеней с одинаковыми основаниями. Найдите значение частного $2^7 : 2^5$.

6. Сформулируйте определение степени с нулевым показателем.

§ 4. Одночлен и его стандартный вид

8. Одночлен. Умножение одночленов

Выражения $15a^2b$, $3xy \cdot 2y$, $-3c^7$ представляют собой произведения чисел, переменных и их степеней. Такие выражения называют одночленами. Числа, переменные и их степени также считаются одночленами. Например, выражения -11, a, a^6 — одночлены.

Одночлен $5a^2b \cdot 2ab^3$ можно упростить, если воспользоваться свойствами умножения и правилом умножения степеней с одинаковыми основаниями. Тогда получим

$$5a^2b \cdot 2ab^3 = 5 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot b^3 = 10a^3b^4.$$

Мы представили данный одночлен в виде произведения числового множителя, записанного на первом месте, и степеней различных переменных. Такой вид одночлена называют *стандартным видом*. Числа, переменные, их степени также считаются одночленами стандартного вида.

Любой одночлен можно преобразовать так, чтобы получился одночлен стандартного вида. Если одночлен записан в стандартном виде, то числовой множитель называют *коэффициентом одночлена*. Например, в одночлене $-10a^2b^4$ коэффициент равен -10. Если коэффициент одночлена равен 1 или -1, то его обычно не пишут. Например, вместо $1a^3b$ пишут a^3b, вместо $-1x^2y^6$ пишут $-x^2y^6$.

При умножении одночленов снова получается одночлен, который обычно записывают в стандартном виде, используя для этого свойства умножения и правило умножения степеней с одинаковыми основаниями.

Пример. Умножим одночлен $12a^6b^4$ на одночлен $-2a^3b$.

Для этого составим произведение одночленов и преобразуем его в одночлен стандартного вида:

$$12a^6b^4 \cdot (-2a^3b) = 12 \cdot (-2) \cdot (a^6 \cdot a^3) \cdot (b^4 \cdot b) = -24a^9b^5.$$

Введём теперь понятие степени одночлена.

Степенью одночлена стандартного вида называют сумму показателей степеней входящих в него переменных. Если одночлен представляет собой число, отличное от нуля, то его степень считается равной нулю.

Например, степень одночлена $12x^2y^3$ равна 5, степень одночлена $-6ab$ равна 2. Выражение $2{,}3^2$ является одночленом нулевой степени.

Число нуль — это одночлен, степень которого не определена.

Упражнения

208. Из данных выражений выберите одночлены:

а) $5a^3b$; г) $2(a + b)$; ж) $(a - b)^3$;
б) $-2aab$; д) b; з) $8{,}6xx^n$;
в) $-(mn^2)^3$; е) $-y$; и) $7{,}5$.

209. Найдите значение одночлена:

а) $18xy$ при $x = 7$, $y = \frac{1}{9}$; в) $-\frac{1}{3}x$ при $x = 2100$;
б) $10a^3$ при $a = 1{,}5$; г) x^4y^2 при $x = -1$, $y = -0{,}5$.

210. Найдите значение одночлена:

а) $-0{,}03a^4b^5$, если $a = 1$, $a + b = 3$;
б) $-4{,}5xy^6$, если $x = -12$, $xy = 12$;
в) ab^2c^3, если $a = -7$, $b = 5$, $a + b + c = 8$.

211. Найдите, при каком значении переменной x:

а) значение одночлена $1{,}7x$ равно 51;
б) значение одночлена $-5{,}1x$ противоположно числу 102.

212. Представьте одночлен в стандартном виде и укажите его коэффициент:

а) $12x^3x \cdot 3x^2$; г) $\frac{1}{7}x^8y \cdot (-4{,}9xy)$;

б) $0{,}3a^2 \cdot 0{,}2a^4$; д) $-3a^3b \cdot (-9b^7)$;

в) $-16b^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}b\right)$; е) $-3xy^8xy^9$.

213. Представьте в стандартном виде одночлен:

а) $-3aabb(-4a^m)$; в) $0{,}01x^{n+1}y \cdot 501xy^n$;

б) $-0{,}8xy^mx^2y^n$; г) $-a^3baa^m \cdot (-0{,}1)a^3$.

214. Выполните умножение одночленов:

а) $\frac{1}{3}x^ny^4$ и $-0{,}3xy$; в) $32a^3b^n$ и $-0{,}2a^nb^4$;

б) $-0{,}2a^2b^3c^{n+2}$ и $-0{,}4a^3c^{n+2}$; г) $\frac{1}{12}xy^8$ и $-240x^{n+1}y$.

215. Перемножьте одночлены:

а) $12x^{2n}y$ и $-\frac{1}{3}x^6y^7$; в) $5xy$, $-x^{2n}$ и $-xy^3$;

б) $a^{2n}b^3$ и $-\frac{1}{7}ab$; г) $8a^3$, $-a^2b^{3m}$ и a^6b^4.

216. Упростите выражение:

а) $3p^2 \cdot (-2p)$; г) $-mn \cdot 3m^4n^8$;

б) $ab(-2ab)$; д) $-2bc \cdot (-0{,}03bc^6)$;

в) $0{,}7x^2 \cdot \frac{1}{49}x$; е) $9a^2b \cdot (-b) \cdot (-0{,}3ab)$.

217. Подберите показатель m так, чтобы данное равенство было верно при любом значении переменной a:

а) $0{,}3a^m \cdot 6a = 1{,}8a^{11}$; в) $1{,}2a^{m+2} \cdot a^3 = 1{,}2a^{10}$;

б) $2{,}6a^4 \cdot 2a^m = 5{,}2a^{16}$; г) $2{,}6a^{m+1} \cdot 3a^8 = 7{,}8a^{12}$.

218. Замените P одночленом так, чтобы полученное равенство было верно при всех значениях переменных:

а) $P \cdot (-3a^2b) = -12a^2b^4$; в) $(-0{,}3a^4b) \cdot P = 0{,}9a^6b \cdot 2b^5$;

б) $-x^2y \cdot P = \frac{3}{8}x^8y^8$; г) $\frac{1}{7}x^4y \cdot P = -\frac{3}{14}x^5 \cdot \frac{1}{5}xy^3$.

219. Представьте одночлен $15x^3y^9$ в виде произведения двух множителей, один из которых равен:

а) $3x^3$; б) $-5xy$; в) $15x^2$; г) $-3xy^2$.

220. Представьте, если возможно, данный одночлен в виде произведения двух множителей, одним из которых является $3ab$:

а) $6a^2b$; в) $-24a^8b^6$; д) $2a^6b^4$;

б) $21a^5b^2$; г) $9b^2$; е) $-ab$.

221. Ширина земельного участка прямоугольной формы равна a м, а длина в 3,5 раза больше. Найдите площадь участка.

222. Длина аквариума, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, в 1,2 раза больше ширины, а высота равна $\frac{1}{3}$ длины. Уровень воды, наполняющей аквариум, составляет 80% его высоты. Найдите объём воды, если ширина аквариума равна a см.

223. Определите степень одночлена:

а) $5a^3b^9$; в) $a^4b^{11}c$; д) $3x^my$; ж) 0;
б) $-xy$; г) $(-0{,}1)^2c^3y$; е) $-x^ny^n$; з) $(-3)^5$.

224. Составьте два каких-либо одночлена пятой степени с двумя переменными a и b.

225. Укажите значение m, при котором:

а) одночлен $6a^mb^4$ является одночленом седьмой степени;
б) одночлен $-ab^mc^3$ является одночленом десятой степени.

Упражнения для повторения

226. Найдите значение выражения

$$(-3)^5 + (-3)^4 + (-3)^3 + (-3)^2 + (-3)^1 + (-3)^0 + \\ + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5.$$

227. Задайте с помощью перечисления элементов множество натуральных делителей числа 30. Выделите из него подмножество простых чисел, являющихся делителями 30.

228. Составьте выражение по условию задачи.

а) Туристы 2 ч 20 мин ехали на автобусе со скоростью a км/ч, а затем ещё 30 мин шли пешком со скоростью b км/ч. Какова длина маршрута?

б) Купили 2 кг капусты по цене a р. за килограмм и 400 г лука по цене b р. за килограмм. Какова стоимость покупки?

9. Возведение одночлена в степень

Рассмотрим сначала правила возведения в степень произведения и степени.

Преобразуем четвёртую степень произведения ab:

$$(ab)^4 = (ab)(ab)(ab)(ab) = (aaaa)(bbbb) = a^4b^4, \text{ т. е. } (ab)^4 = a^4b^4.$$

Четвёртая степень произведения равна произведению четвёртых степеней множителей.

Аналогичным свойством обладает любая натуральная степень произведения двух множителей.

Если a и b — произвольные числа и n — любое натуральное число, то

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Докажем это, воспользовавшись определением степени и свойствами умножения:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)...(ab)}_{n \text{ раз}} = (\underbrace{aa...a}_{n \text{ раз}})(\underbrace{bb...b}_{n \text{ раз}}) = a^n b^n, \text{ т. е. } (ab)^n = a^n b^n.$$

Доказанное свойство распространяется на произведение трёх и более множителей. Например,

$$(abc)^n = a^n b^n c^n, \ (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n.$$

Отсюда следует правило:

чтобы возвести в степень произведение, нужно возвести в эту степень каждый множитель и результаты перемножить.

Рассмотрим теперь, как можно возвести степень в степень. Преобразуем, например, выражение $(a^5)^4$:

$$(a^5)^4 = a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 = a^{5+5+5+5} = a^{20}, \text{ т. е. } (a^5)^4 = a^{5 \cdot 4}.$$

Аналогичное свойство выполняется для произвольных степеней с натуральными показателями.

Если a — произвольное число, m и n — любые натуральные числа, то

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Докажем это, воспользовавшись основным свойством степени и определением произведения натуральных чисел:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m ... a^m}_{n \text{ раз}} = a^{\overbrace{m+m+...+m}^{n \text{ раз}}} = a^{mn}.$$

Следовательно,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Из доказанного свойства следует правило:

чтобы возвести степень в степень, нужно основание оставить тем же, а показатели степеней перемножить.

Аналогично тому, как было доказано свойство степени произведения, можно доказать свойство степени дроби: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{a^n}{b^n}$. Следовательно, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, где $b \neq 0$.

Из этого свойства следует правило:

чтобы возвести в степень дробь, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель, первое выражение записать в числитель, а второе — в знаменатель.

Правила возведения в степень произведения и степени используются при возведении одночленов в степень.

Пример 1. Возведём одночлен $-3a^3b^2$ в шестую степень:

$$(-3a^3b^2)^6 = (-3)^6 \cdot (a^3)^6 \cdot (b^2)^6 = 729a^{18}b^{12}.$$

Пример 2. Возведём одночлен $-x^4y^3z$ в третью степень:

$$(-x^4y^3z)^3 = (-1)^3 \cdot (x^4)^3 \cdot (y^3)^3 \cdot z^3 = -x^{12}y^9z^3.$$

Заметим, что свойства степеней, выраженные формулами $(ab)^n = a^nb^n$ и $(a^m)^n = a^{mn}$, распространяются и на степени с нулевым показателем (если основания степеней отличны от нуля).

Упражнения

229. Возведите в степень произведение:

а) $(bx)^6$; в) $(abc)^5$; д) $\left(\frac{1}{3}ab\right)^3$; ж) $(-0{,}1abc)^3$;

б) $(-3x)^4$; г) $(2a)^5$; е) $\left(-\frac{1}{4}xy\right)^2$; з) $(-0{,}3bcd)^4$.

230. Выполните возведение в степень:

а) $(cd)^6$; в) $(-6a)^3$; д) $(0{,}2ab)^3$; ж) $(-0{,}3xyc)^n$;

б) $(-xyz)^9$; г) $(-3ab)^4$; е) $\left(-\frac{1}{7}xy\right)^2$; з) $(0{,}3mnp)^n$.

231. Упростите выражение:

а) $(-3abc) \cdot \left(-\frac{1}{3}bc\right)^4 \cdot (12ab)^2$; в) $(-0{,}1bc)^4 \cdot (0{,}2ac)^2 \cdot (-10abc)^3$;

б) $\left(\frac{1}{7}xy\right)^4 \cdot (-49axy)^2 \cdot (-2ay)^6$; г) $\left(1\frac{1}{7}axy\right)^2 \cdot \left(-\frac{7}{8}ay\right)^3 \cdot (-2ax)^5$.

232. Как изменятся поверхность и объём куба, если его ребро увеличить в 2 раза; в 3 раза; в n раз?

233. Для покраски шара потребовалось 47 г краски. Хватит ли 100 г краски, чтобы покрасить шар, радиус которого в полтора раза больше? (Площадь поверхности S шара вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$, где R — радиус шара.)

234. Найдите значение выражения:

а) $0{,}2^6 \cdot 5^6$; в) $1{,}25^2 \cdot 80^2$; д) $2^4 \cdot 5^5$;

б) $0{,}25^8 \cdot 4^8$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{10}$; е) $0{,}25^3 \cdot 4^4$.

235. Найдите значение выражения, если $ab = 3$:

а) a^7b^7; б) $8a^4b^4$; в) $0{,}01a^5b^5 - 3$.

236. Выполните возведение в степень:

а) $(a^6)^2$; в) $(x^3)^4$; д) $(a^n)^3$; ж) $(a^5)^{2n}$;

б) $(b^4)^5$; г) $(b^6)^6$; е) $(a^7)^n$; з) $(a^2)^{3n}$.

237. Представьте, если возможно, выражение в виде степени с основанием 2:

а) $(4^3)^6$; б) $(-4^2)^8$; в) $(-8)^2 \cdot 64$.

238. Представьте, если возможно, выражение в виде степени с основанием -3:

а) 9^6; б) 27^5; в) 81^4; г) 729^2.

239. Представьте, если возможно, выражение в виде степени с основанием y:

а) $(-y^7)^{2n}$; б) $-(-y^n)^4$; в) $(-y^n)^8$; г) $-(-y^{2n})^5$.

240. Замените знак * степенью числа p так, чтобы получилось равенство, верное при любых значениях p:

а) $(*)^5 = p^{20}$; в) $(*)^8 \cdot p^7 \cdot p^4 = p^{27}$;

б) $(*)^4 \cdot p^3 = p^{19}$; г) $p \cdot p^4 \cdot (*)^{10} = p^{35}$.

241. Зная, что $a^4 = m$, найдите:

а) $a^{25} \cdot a^{11}$; б) $(-a^3)^6 \cdot (-a^2)^3$; в) $3(-a)^{12} \cdot (-a^3)^4$.

242. Представьте степень в виде частного:

а) $\left(\frac{a}{b}\right)^6$; в) $\left(\frac{m^2}{2n}\right)^7$; д) $\left(\frac{ab^n}{c}\right)^n$;

б) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3$; г) $\left(-\frac{p}{q^2}\right)^{21}$; е) $\left(-\frac{m^x}{n^y}\right)^4$.

243. Представьте выражение в виде степени:

а) $\frac{k^3}{m^{12}}$; б) $-\frac{32a^{10}}{b^5}$; в) $\frac{16x^8}{625y^4}$; г) $\frac{c^n}{n^{2n}}$.

244. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2,84^3}{1,42^3}$; б) $\frac{(-7,56)^7}{15,12^7}$; в) $\frac{21^4}{49^2}$; г) $\frac{(-11)^6}{(-5,5)^5}$.

245. Известно, что $\frac{a}{b}=-2$. Чему равно значение выражения:

а) $\frac{a^4}{b^4}$; б) $\frac{a^5}{2b^5}$; в) $-\frac{2b^3}{a^3}$; г) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$?

246. Вычислите значение выражения:

а) $\frac{1,7^{10}\cdot 1,7^5}{(1,7^4)^4}$; в) $\frac{(32^2)^2\cdot 4^5}{(-16)^8}$; д) $\frac{3^6\cdot 2^7}{36^3}$;

б) $\frac{(-3,1)^4\cdot(3,1^3)^3}{(-3,1^2)^6}$; г) $\left(\frac{3^{13}}{5^{13}}\right)\cdot\frac{25^6}{27^4}$; е) $\frac{21^5}{9^3\cdot 7^4}$.

247. При каком натуральном значении x выполняется равенство:

а) $\frac{3^{2x}}{4^x}=2,25$; в) $\frac{3^{x+1}\cdot 9^x}{27}=3$;

б) $\frac{2^{3x-1}\cdot 16}{4^x}=64$; г) $\frac{5^x\cdot 25^x}{125^x}=5^{x-1}$?

248. Пользуясь таблицей квадратов двузначных чисел, найдите значение выражения:

а) 9^4; в) 8^6; д) 6^4+5^4; ж) $6\cdot 7^4$;

б) 7^4; г) 3^8; е) 8^4-3^4; з) $-9\cdot 4^6$.

249. Упростите выражение:

а) $(a^3)^2a$; в) $a^8:(a^2)^3$; д) $(a^2)^4\cdot(a^3)^2$;

б) $(x^4)^3:x$; г) $y\cdot(y^5)^2$; е) $(a^8)^2:(a^4)^4$.

250. Верно ли при любом значении x равенство:

а) $(-x^3)^2\cdot(x^5)^4=(x^7)^3\cdot(-x^2)^2x$;

б) $(-x^2)^3\cdot(-x^6)^2=(-x^5)^3\cdot x^2$;

в) $(-x^4)^4\cdot(x^2)^2=(-x^6)^2\cdot(-x^5)^2$?

251. Укажите все пары натуральных значений переменных a и n, при которых верно равенство:

а) $a^n=(2^2)^2$;

б) $a^n=(3^2)^2$;

в) $a^n=(2^2)^3$.

252. Возведите одночлен в степень:

а) $(1,2a^3b)^2$; б) $(-ab^5c^{11})^6$; в) $(-1,1x^ny^8)^2$; г) $(-0,3a^6y^n)^4$.

253. Представьте выражение в виде квадрата одночлена:

а) $16x^8$; б) $\frac{1}{81}a^4b^2$; в) $0,01x^8y^{16}$; г) $1,21a^4b^6c^2$.

254. Представьте выражение в виде куба одночлена:

а) $8x^6$; б) $-125c^9d^6$; в) $-\frac{1}{27}x^9y^{12}$; г) $0{,}216a^3c^6$.

255. Представьте выражения:

а) $0{,}01x^{12}y^4$; x^8y^8; $1\frac{7}{9}a^{16}c^{18}$ в виде квадрата одночлена;

б) $0{,}001a^3b^9$; $-m^3n^6$; $\frac{64}{343}p^3q^9$ в виде куба одночлена.

256. Замените показатели m и n числами так, чтобы получилось равенство, верное при всех значениях переменных a и b:

а) $(a^mb^4)^6 = (a^9b^n)^2$; б) $(a^{12}b^n)^6 = (a^mb^3)^4$.

257. Упростите выражение:

а) $12a^3 \cdot (3a^4)^2$; г) $-12a^6b^4 \cdot (-5ab^2)^3$;

б) $\frac{1}{16}b^8 \cdot (-2b^3)^4$; д) $-\frac{1}{27}xy \cdot (-3x^4y)^4$;

в) $-0{,}09c^8 \cdot (10c^4)^3$; е) $(-6a^2b^3)^2 \cdot (-3a^3b)$.

258. Преобразуйте выражение в одночлен стандартного вида и определите степень этого одночлена:

а) $(-ab)^4 \cdot (2ab)^5$; д) $(-abc)^3 \cdot (0{,}1c^2)^4$;

б) $(-xy)^5 \cdot (0{,}1x^3y^2)^3$; е) $(0{,}1m^3n)^2 \cdot (-10mn^2)^3$;

в) $\left(-\frac{1}{3}a^2b^4\right)^2 \cdot (-3ab)^3$; ж) $\left(\frac{2}{3}mn\right)^2 \cdot (-3m)^4$;

г) $(0{,}2abc^2)^3 \cdot (ab)^4$; з) $\left(\frac{1}{7}x^2y\right)^2 \cdot (-7x^4)^3$.

259. Упростите выражение:

а) $-(ab)^2 \cdot a^3b$; д) $-(0{,}1x^2y)^3 \cdot (10x^8y^2)^2$;

б) $(-ab)^4 \cdot (-ab^2)^3$; е) $(-0{,}2m^3n)^2 \cdot (4m^3n)^3$;

в) $(-y^2)^5 \cdot (-2y^5)^2$; ж) $(-8pq^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}p^2q\right)^3$;

г) $(-a^6b)^4 \cdot (-9ab^4)^2$; з) $-(-mn^2)^2 \cdot (-m^2n^3)^3$.

Упражнения для повторения

260. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

а) $\frac{a-4}{8}$; б) $\frac{27}{a+16}$; в) $\frac{3a}{a^2-4}$; г) $\frac{24}{|a|-5}$.

261. Определите степень одночлена:

а) $-3a^8b^9$; б) $-a^mb^8c$; в) $1{,}2a^mb^nc^{3n}$.

262. Сравните значения выражений:

а) $(-3a^4)^{99}$ и $(3a^4)^{99}$; б) $(-12a^6)^8$ и $(12a^6)^8$.

263. На покраску всех граней куба потребовалось 54 г краски. Сколько краски потребуется, чтобы покрасить все грани куба, ребро которого втрое больше?

264. Чтобы заполнить сосуд, имеющий форму куба, потребовалось 230 г жидкости. Сколько жидкости вмещает сосуд, имеющий форму куба, ребро которого вдвое больше?

10. Тождества

Рассмотрим равенства $a^{12} \cdot a^3 = a^7 \cdot a^8$ и $a^{12} : a^3 = a^2 \cdot a^7$.

Первое равенство верно при любых значениях переменной a, а второе — при любых значениях a, кроме нуля. Областью допустимых значений переменной a первого равенства является множество всех чисел. Областью допустимых значений правой части второго равенства также является множество всех чисел, а левой — множество всех чисел, кроме нуля.

О каждом из этих равенств можно сказать, что оно верно при любых допустимых значениях переменной a. Такие равенства называют тождествами.

Определение. Тождеством называется равенство, верное при любых допустимых значениях переменных.

Верные числовые равенства также считают тождествами.

С примерами тождеств вы уже встречались. Так, тождествами являются равенства, выражающие свойства действий над числами:

$$a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c,$$
$$ab = ba, \quad a(bc) = (ab)c, \quad a(b + c) = ab + ac,$$
$$a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot (-1) = -a.$$

! Выражения, соответственные значения которых равны при любых допустимых значениях переменных, называются тождественно равными.

Например, тождественно равными являются выражения

$$(a^2)^4 \text{ и } a^8, \quad ab \cdot (-a^2b^2) \text{ и } -a^3b^3, \quad \frac{x^3 \cdot x^8}{x} \text{ и } x^{10}.$$

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют *тождественным преобразованием*. С тождественными преобразованиями вы встречались, например, при умножении одночленов, возведении одночленов в степень.

Упражнения

265. Является ли тождеством равенство:

а) $a + 5 = 5 + a$; в) $3a \cdot 3b = 9ab$;

б) $a(-b) = -ab$; г) $a - b = b - a$?

266. Из данных равенств выберите те, которые являются тождествами:

а) $12ab = 3a(-4b)$; г) $(a-4)^2 = (4-a)^2$;

б) $b - 8 = 8 - b$; д) $x^8 : x^4 = x^3$;

в) $x^{15} \cdot x = x^{16}$; е) $(-a)^2 \cdot a = (-a)^3$.

267. Запишите пример тождества, содержащего:

а) одну переменную;

б) две переменные;

в) три переменные.

268. Замените букву m таким числом, чтобы полученное равенство было тождеством:

а) $x^m \cdot (x^3)^2 = x^{16}$;

б) $(a^2)^m \cdot a^8 = a^{20}$;

в) $(xy)^m \cdot y^8 = x^m y^{10}$;

г) $(a^2b)^4 \cdot b^m = a^8b^{16}$.

269. Являются ли тождественно равными выражения:

а) $2a + 13$ и $13 + 2a$;

б) $3x - 11$ и $11 - 3x$;

в) $(-x) \cdot (-y)$ и $-xy$;

г) $(x - y)^3$ и $(y - x)^3$?

270. Укажите, если возможно, значение n, при котором тождественно равны выражения:

а) $x^4 \cdot x^n$ и x^{20}; в) $(a^2)^2 : a^n$ и a^3;

б) $x^n : x^3$ и x^{17}; г) $(a^6)^n \cdot a$ и a^{14}.

271. Из данных выражений выберите те, которые тождественно равны одночлену $a^{12}b^8$:

а) $(-ab)^8 \cdot a^4$; в) $\left(\frac{1}{2}ab\right)^5 \cdot 32a^7b^3$; д) $(ab)^8 \cdot (-a^6b^2)$.

б) $\left(\frac{1}{3}a^4b\right)^2 \cdot 3a^2b^3$; г) $(-ab)^5 \cdot (-a^2b)^3$;

272. Какие из данных выражений тождественно равны одночлену $2x^2y$:

а) $\frac{1}{4}xy \cdot 8x$; в) $(-xy) \cdot (-2x)$; д) $-\frac{1}{3}x^2 \cdot (-6y)$;

б) $-xy \cdot (-2xy)$; г) $-10x \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$; е) $-12x^2 \cdot \frac{1}{6}y$?

Упражнения для повторения

273. Ученик показал друзьям арифметический фокус. «Задумайте двузначное число; прибавьте к нему число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке; полученный результат разделите на сумму цифр задуманного числа. У вас получилось 11». Как ученик узнал результат?

274. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно s км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Скорость одного из них равна 60 км/ч, а другого — 80 км/ч. Какое расстояние будет между автомобилями через 2 ч, если известно, что:

а) встреча ещё не произошла;

б) встреча уже произошла и автомобили продолжили движение?

275. Найдите значение выражения $2-\dfrac{a}{a-\dfrac{a}{a+\dfrac{a}{a-\dfrac{a}{2}}}}$ при:

а) $a = 1$; б) $a = 2$; в) $a = 3$.

Не вычисляя, ответьте на вопрос: чему будет равно значение этого выражения при $a = 4$? Проверьте вашу гипотезу подстановкой.

276. Имеются два разных сплава серебра: первый, массой 25 кг, содержит 84% серебра, второй, массой 12,5 кг, содержит 72% серебра. Сплавив их, получили новый сплав. Какой процент серебра получится в новом сплаве?

? Контрольные вопросы и задания

1. Что называется степенью одночлена стандартного вида? Приведите пример одночлена стандартного вида и укажите его степень.

2. Какие свойства используются при умножении одночленов? Умножьте одночлен $2x^6y^4$ на одночлен $-3xy^5$.

3. Сформулируйте правило возведения произведения в степень. Возведите выражение $2ab$ в пятую степень.

4. Сформулируйте правило возведения степени в степень. Возведите выражение a^5 в четвёртую степень.

5. Сформулируйте правило возведения частного в степень. Представьте в виде частного степень $\left(-\dfrac{x^2}{y^3}\right)^4$.

6. Сформулируйте определение тождества. Приведите пример.

7. Какие выражения называются тождественно равными? Приведите пример выражения, тождественно равного выражению a^6.

Дополнительные упражнения к главе 2

К параграфу 3

277. Верно ли равенство:

а) $3^2 + 4^2 + 5^2 = 6^2$;

б) $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$;

в) $(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$;

г) $3^3 + 10^3 + 18^3 = 19^3$?

278. Найдите:

а) значение выражения $1^6 - 2^6 + 3^6$;

б) сумму квадратов первых семи простых чисел;

в) сумму первых 36 натуральных чисел.

279. Найдите все целые значения b, при которых:

а) $1 < b^2 < 20$; б) $40 < b^2 < 70$.

280. Составьте таблицу значений:

а) степеней числа 2 с показателем n от 1 до 10 включительно;

б) степеней числа 3 с показателем n от 1 до 10 включительно.

281. Выпишите первые шесть последовательных значений выражения $1{,}5 \cdot (-2)^n$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$.

282. Найдите множество значений выражения:

а) $12 \cdot (-1)^n + 6 \cdot (-1)^{2n}$; б) $\frac{(-1)^n + (-1)^{n+1}}{12}$.

283. Путь, пройденный телом при свободном падении, вычисляется по формуле $s = 4{,}9t^2$, где t — время падения (в с), s — пройденный путь (в м). Найдите s, если $t = 1{,}5$; 2; 3,5.

284. Объём шара V вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара, $\pi \approx 3{,}14$. Вычислите объём шара, если его радиус равен 3,6 см.

285. Какой цифрой оканчивается четвёртая степень числа a, если:

а) $a = 71$; б) $a = 105$; в) $a = 49$; г) $a = 94$?

286. Сравните:

а) -5^{2n} и $(-5)^{2n}$; в) 23^{4n+2} и $(-23)^{4n+2}$;

б) -7^{4n+1} и $(-7)^{4n+1}$; г) -15^{4n} и $(-15)^{4n}$.

287. Зная, что $a > 0$ и $b < 0$, сравните с нулём значение выражения:

а) $(a - b)^3$; б) $(b - a)^5$; в) $-6a^n b^{2n+1}$; г) $a^n - b^{4n+3}$.

288. Найдите значение суммы

$$(-1) + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{99} + (-1)^{100}.$$

289. Представьте, если это возможно, в виде степени с основанием $-x$ выражение:

а) $-x^4$; в) x^7; д) $-x^3$; ж) x^{4n+2};

б) x^6; г) x^4; е) $-x^6$; з) x^{4n+1}.

290. Определите, по какому правилу составлена последовательность, и напишите три следующих её члена:

а) 1, 4, 9, ... ; г) 3, 9, 27, ... ;

б) 2, 5, 10, ... ; д) −2, 4, −8, ... ;

в) 3, 12, 27, ... ; е) −1, 1, −1, ...

Сформулируйте и запишите соответствующее правило для каждой последовательности.

291. Докажите, что при любом $n \in N$ значение выражения кратно 9:

а) $10^n - 1$; в) $100^n + 17$;

б) $10^n + 8$; г) $100^n - 1$.

292. Докажите, что при любом $n \in N$ значение данного выражения является целым числом:

а) $\frac{10^n + 7199}{9}$; в) $\frac{10^n + 305}{15}$;

б) $\frac{10^n + 317}{3}$; г) $\frac{10^n + 428}{6}$.

293. Сравните a^2 и a^3, если:

а) $a = -3{,}7$; б) $a = 0$; в) $a = 0{,}5$; г) $a = 1{,}5$.

294. Упростите выражение:

а) $(-a)^{10} \cdot a^3 \cdot (-a)^6$; в) $a(-a)^4 \cdot a^n$;

б) $-a^4 \cdot a^2 \cdot (-a)^6$; г) $-a^2 \cdot a^6 \cdot (-a)^{2n}$.

295. Представьте 3^{12} всеми возможными способами в виде произведения двух степеней числа 3.

296. Представьте в виде произведения двух множителей, один из которых равен x^3, выражение:

а) x^{17}; б) $-x^8$; в) x^{n+3}; г) x^{3+2n}.

297. Найдите x, если:

а) $6^2 \cdot x = 6^3$; в) $x \cdot 2^6 \cdot 2^9 = 2^{17}$;

б) $x \cdot 4^{25} = 4^{27}$; г) $3^{11} \cdot 3^5 \cdot x = 3^{18}$.

298. Замените c степенью с основанием a так, чтобы полученное равенство было верно при всех значениях a:

а) $c \cdot a^8 = a^{11}$; в) $c(a^5a^8) = a^{17}$;

б) $a^{13} \cdot c = a^{16}$; г) $(aa^{14})c = a^{20}$.

299. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3^{16}\cdot 2^{14}}{3^{15}\cdot 2^{10}}$; б) $\frac{5^7\cdot 3^{11}}{5^6\cdot 3^{12}}$; в) $\frac{5^{n+2}}{5^{n+1}\cdot 5^4}$; г) $\frac{2^6\cdot(-2)^3}{32}$.

300. Зная, что $2^n = 1024$, найдите значение выражения:

а) 2^{n+1}; б) 2^{n-1}; в) 2^{n+2}; г) 2^{n-3}.

301. Упростите выражение:

а) $\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^3}{(-1)^n\cdot x^2}$; б) $\frac{(-1)^{n+2}\cdot x^8}{(-1)^n\cdot x^6}$.

302. Вычислите:

а) $(1{,}7 - 3{,}4)^0 \cdot 6{,}12 - 3 \cdot 2^3$; б) $\left(1\frac{1}{71}+2\frac{1}{32}\right)^0\cdot 2\frac{1}{9}-12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4$.

303. Найдите значение выражения:

а) $-a^2 - a^3$ при $a = -7$;

б) $-b^0 + 8b^5$ при $b = \frac{1}{2}$;

в) $-a^2b + b^0$ при $a = 0{,}2$, $a + b = 5$;

г) $-4a^2 - b^3$ при $a = -1{,}5$, $a + b = 6{,}5$.

304. Расположите степени в порядке возрастания:

$(-3{,}7)^5$, $(-3{,}7)^4$, $(-3{,}7)^0$, $(-3{,}7)^6$.

К параграфу 4

305. Определите степень одночлена:

а) $-5a^2b^7c$; в) $0{,}5^2a^mb^2$; д) 123;

б) $-11abc$; г) $-1{,}72a^mb^mc$; е) 25^2.

306. В выражении $4{,}57a^mb^n$ замените показатели m и n натуральными числами так, чтобы получился одночлен шестой степени. Укажите все возможные способы.

307. Преобразуйте в одночлен стандартного вида произведение одночленов:

а) $-2\frac{1}{13}a^7b$, $1{,}3a^5b$ и $-10a^{10}b^{11}$;

б) $1\frac{2}{17}x^3y^2z$, $-5{,}1xyz$ и $-0{,}1x^2y^2z^3$;

в) $-12{,}5p^7c^3$, $-8p^3c$ и $0{,}2p^9c^4$;

г) $-6{,}2a^3b^4c^8$, $-0{,}3abc$ и $-5ab^4c^4$.

308. Представьте одночлен $45x^6y^8$ в виде:

а) произведения двух одночленов с переменными x и y;

б) произведения трёх одночленов с переменными x и y;

в) произведения двух одночленов, один из которых не содержит x, а другой не содержит y.

309. Представьте выражение в виде a^n или $-a^n$:

а) $(a^3)^2$; в) $(-a^2)^3$;
б) $(-a^3)^2$; г) $-(a^2)^3$.

310. Представьте 2^{18} всеми возможными способами в виде степени с показателем, отличным от 1.

311. Зная, что $b^4 = 6561$, найдите:

а) $-b^4$; б) $(-b)^4$; в) b^8; г) $(-b)^8$; д) $-b^8$.

312. Какой цифрой может оканчиваться:

а) квадрат натурального числа;
б) четвёртая степень натурального числа;
в) восьмая степень натурального числа?

313. Какой цифрой оканчивается произведение:

а) $31^4 \cdot 75^6$; в) $15^6 \cdot 9^8$; д) $6^{15} \cdot 3^{12}$;
б) $6^{12} \cdot 3^4$; г) $3^{16} \cdot 5^{18}$; е) $9^8 \cdot 15^5$?

314. Выполните возведение в степень:

а) $(a^n)^3$; в) $(-x^3)^n$; д) $-(b^n)^5$;
б) $(-a^3)^{2n}$; г) $(-x^n)^4$; е) $-(-b^4)^n$.

315. Представьте:

а) 4^{16} в виде степени с основанием 2;
б) 2^{24} в виде степени с основанием 8;
в) 81^{11} в виде степени с основанием 9;
г) 5^{15} в виде степени с основанием 125.

316. Сравните:

а) 9^6 и 27^3; в) 25^4 и 125^2;
б) 8^9 и 4^{14}; г) $\left(\frac{1}{8}\right)^4$ и $\left(\frac{1}{4}\right)^6$.

317. Выражения 2^{16}, 4^8 и 16^2 представьте:

а) в виде степеней с одинаковыми основаниями;
б) в виде степеней с одинаковыми показателями.

318. Сравните:

а) 5^{20} и 15^{10}; б) 8^{40} и 72^{20}.

319. Преобразуйте выражение в одночлен стандартного вида и укажите степень одночлена:

а) $-1{,}2ab \cdot (-0{,}5a^2b^6)$; г) $-0{,}6xy^2 \cdot (5xy^6)^2$;
б) $0{,}75x^6y \cdot \left(-1\frac{1}{3}xy^3\right)$; д) $-\frac{1}{49}x^2y^2 \cdot (-7x^6y^6)^3$;
в) $-\frac{2}{3}bc^6 \cdot (-0{,}36bc)$; е) $-\frac{4}{9}pq^3 \cdot (-0{,}3p^8q^8)^2$.

320. Упростите выражение:

а) $(3ab)^4 \cdot (-5a^2)^3$;
б) $(-4x^3y)^2 \cdot (-xy)^6$;
в) $-(3xy)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^2y^2\right)^2$;
г) $-(0{,}5ac^2)^2 \cdot (-a^2c^3)^5$;
д) $-(pq^2)^5 \cdot (-2p^3q)^4$;
е) $\left(-\frac{1}{9}xy^2\right)^2 \cdot (3x^2y)^4$;
ж) $(-mn^3)^2 \cdot (-m^3n)^3$;
з) $-\left(\frac{1}{6}ac^3\right)^2 \cdot (-12a^2c^4)^2$.

321. Упростите выражение:

а) $3x^my \cdot (-2x^2y)^4$;
б) $-xy(xy)^m$;
в) $-a^mc^m \cdot (-4a^2c)^3$;
г) $\frac{1}{7}xy\,(-0{,}7x^ny)^2$;
д) $(-5x^ny^2)^3 \cdot 4x^4y$;
е) $-(3ab^2)^3 \cdot (a^n)^5$;
ж) $(-ac^{3n})^4 \cdot (-a^nb)^5$;
з) $(25ax^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}a^nx^m\right)^3$.

322. Из данных выражений выберите те, которые тождественно равны одночлену $32a^8b^{11}$:

а) $(-2ab)^4 \cdot 2a^4b^7$;
б) $(-ab)^8 \cdot (-32ab)$;
в) $(2ab)^5 \cdot (ab^2)^3$;
г) $-(-2a^2b^2)^3 \cdot a^3b^5$.

323. Запишите произвольное трёхзначное число; умножьте его сначала на 7, потом на 13, после чего на 11. В полученном числе зачеркните последние три цифры. Какое число останется? Объясните, почему так произошло.

Глава 3 Многочлены

Содержание этой главы посвящено изложению основ теории многочленов: многочленам с одной или несколькими переменными, стандартному виду многочленов, степени многочлена, действиям с многочленами. Материал главы позволит подробно рассмотреть понятие уравнения и его свойств, а также тему «Формулы сокращённого умножения».

§ 5. Многочлен и его стандартный вид

11. Многочлен. Вычисление значений многочленов

Выражение $5a^2b - 3ab - 4a^3 + 7$ представляет собой сумму одночленов $5a^2b$, $-3ab$, $-4a^3$ и 7. Такие выражения называют многочленами.

Определение. Многочленом называется сумма одночленов.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют членами многочлена.

Например, членами многочлена $x^3y - 4x^2 + 9$ являются одночлены x^3y, $-4x^2$ и 9.

Многочлен, состоящий из двух членов, называется *двучленом*, а многочлен, состоящий из трёх членов, — *трёхчленом*. Одночлен считают многочленом, состоящим из одного члена.

Многочлены иногда называют *полиномами*, а двучлены — *биномами* (от греческих слов «поли» — много, «номос» — член, часть и латинского «би» — два, дважды).

Зная значения переменных, входящих в многочлен, можно вычислить значение многочлена.

Пример. Найдём значение многочлена $-0{,}3x^2y - x^3 + 7y$ при $x = -0{,}2$, $y = -1$.

Имеем:

$$-0{,}3x^2y - x^3 + 7y = -0{,}3 \cdot (-0{,}2)^2 \cdot (-1) - (-0{,}2)^3 + 7 \cdot (-1) =$$
$$= 0{,}012 + 0{,}008 - 7 = -6{,}98.$$

Упражнения

324. Назовите члены многочлена и укажите степень каждого из них:

а) $-x^3 + 5x^2y - y^4$;

б) $7a^8c - 5a^3 + 3c^2 - 11$.

325. Расположите одночлены в записи многочлена по убывающим степеням переменной:

а) $2x^6 + 5 - 4x^8 + x^4 - x$; б) $15y^9 - y^{10} - 6y^3 - 11$.

326. Расположите одночлены в записи многочлена

$$12a^5 + ab - a^{10}b^8 - 3a^{12}b^6 + b^{10}$$

по возрастающим степеням:

а) переменной a; б) переменной b.

327. Представьте в виде многочлена число:

а) $\overline{xyz}$; б) $\overline{ab}$; в) $\overline{abcd}$; г) $\overline{mnefk}$; д) $\overline{abcdef}$.

328. Найдите значение многочлена:

а) $x^6 - 10x^4 + 11x^3 - x + 14$ при $x = -2$;

б) $a^3b - 14a^3 - 6ab^2 + b + 2$ при $a = -1$, $b = 0{,}5$;

в) $5x^4 - x^3 + 7x^2 - 11x + 4$ при $x = -3$;

г) $15a^2b - 5ab^2 + 7ab - 21$ при $a = 0{,}2$, $b = -1{,}2$.

329. Составьте таблицу значений многочлена $2x^3 - 3x + 1$ при всех целых значениях переменной, удовлетворяющих условию $-2 \leqslant x \leqslant 3$. При каком из этих значений переменной значение многочлена равно нулю?

330. Найдите значения многочлена $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ для всех целых значений переменных, расположенных между числами -3 и 3.

331. Найдутся ли такие целые значения x, при которых значение многочлена $5x^6 + 15x^3 + 25x + 7$ является числом:

а) чётным; б) нечётным; в) кратным 5?

Исаак Ньютон (1643—1727), английский физик и математик; создал теоретические основы механики и астрономии, разработал (наряду с немецким учёным В. Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление; автор важнейших экспериментальных работ по оптике; внёс существенный вклад в теорию многочленов.

332. Докажите, что не может быть отрицательным числом значение многочлена:

а) $x^2 + y^2 + 4$;

б) $a^4 + 3a^2b^2 + b^4 + b^2 + 1$;

в) $a^6 + b^6 + a^6b^6 + a^{12}b^{16}$.

333. Из многочленов

$$x^2 + y^2, \quad a^2 + b^2 + 4, \quad 4a^2b^2, \quad b^8 + 3b^4 + 6, \quad 1 + b^{12}$$

выберите те, которые при любых значениях переменных принимают положительные значения.

334. Замените показатели m и n какими-либо натуральными числами так, чтобы при любых значениях переменных x и y многочлен:

а) $x^8y^6 + 6x^4y^2 + x^my^n + 1$ принимал положительные значения;

б) $-x^{16}y^4 - 18x^2y^2 - 5x^{2m}y^n - 6$ принимал отрицательные значения.

335. Верно ли, что при любом натуральном значении n многочлен:

а) $a^{4n+2} + a^{2n} + 16$ принимает положительные значения;

б) $-a^{4n} - 5a^{2n}$ принимает отрицательные значения?

336. Вычисление значения многочлена $P(x) = 2x^4 - 9x^3 - 20x^2 - 57$ при $x = 6$ можно провести, представив многочлен в виде

$$P(x) = ((2x - 9)x - 20)x^2 - 57.$$

Вычисления примут вид

$$((2 \cdot 6 - 9) \cdot 6 - 20) \cdot 6^2 - 57 = ((12 - 9) \cdot 6 - 20) \cdot 36 - 57 =$$
$$= (3 \cdot 6 - 20) \cdot 36 - 57 = -2 \cdot 36 - 57 = -72 - 57 = -129.$$

Найдите значение этого многочлена при данном значении переменной прямой подстановкой. Какой способ вычисления удобнее?

337. Используя приём вычисления значения многочлена, изложенный в упражнении 336, найдите значение многочлена:

а) $x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ при $x = -1; -2; -3; 4$;

б) $x^4 + 3x^2 + 2x + 1$ при $x = 1; -2; -3; -4; 3$.

Упражнения для повторения

338. Преобразуйте в одночлен стандартного вида:

а) $(-2a^2b)^3 \cdot (ab)$; б) $(-3ab)^5 \cdot (-2a^2b^3)^2$.

339. Вычислите рациональным способом значение выражения:

а) $17{,}95 \cdot 3{,}81 + 17{,}95 \cdot 6{,}19$; б) $64 \cdot 27\frac{1}{3} - 27\frac{1}{3} \cdot 34$.

340. Из множества двузначных чисел выделите подмножество чисел, кратных 19.

12. Стандартный вид многочлена

В многочлене

$$13x^2y + 4 + 8xy - 6x^2y - 9$$

первый и четвёртый члены имеют одинаковую буквенную часть. Члены многочлена, имеющие одинаковую буквенную часть, называются *подобными* членами. Подобными членами считаются и слагаемые, не имеющие буквенной части.

Сумму подобных членов многочлена можно заменить одночленом. Такое тождественное преобразование называют приведением подобных членов или приведением подобных слагаемых. Приведение подобных членов основано на переместительном и сочетательном свойствах сложения и распределительном свойстве умножения.

Пример 1. Приведём подобные члены многочлена

$$13x^2y + 4 + 8xy - 6x^2y - 9.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &13x^2y + 4 + 8xy - 6x^2y - 9 = \\ &= (13x^2y - 6x^2y) + 8xy + (4 - 9) = \\ &= (13 - 6)x^2y + 8xy - 5 = \\ &= 7x^2y + 8xy - 5. \end{aligned}$$

В многочлене $7x^2y + 8xy - 5$ каждый член является одночленом стандартного вида, причём среди них нет подобных членов. Такие многочлены называются многочленами стандартного вида.

Рассмотрим многочлен стандартного вида $3a^3 - 5a^3b^2 + 7$. Его членами являются одночлены третьей, пятой и нулевой степени. Наибольшую из этих степеней называют степенью многочлена. Таким образом, этот многочлен является многочленом пятой степени.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

Пример 2. Определим степень многочлена

$$a^6 + 2a^2b - a^6 + 1.$$

Для этого приведём многочлен к стандартному виду:

$$a^6 + 2a^2b - a^6 + 1 = 2a^2b + 1.$$

Степень полученного многочлена равна трём. Значит, и степень заданного многочлена равна трём.

Если многочлен является числом, отличным от нуля, то степень такого многочлена равна 0. Число нуль называют *нуль-многочленом*. Его степень считается неопределённой.

Среди многочленов выделяют многочлены с одной переменной. Многочлен n-й степени с одной переменной в стандартном виде записывается так:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n,$$

где x — переменная, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ — произвольные числа, причём $a_0 \neq 0$, $n \in N$ или $n = 0$. Коэффициент при x^n называют *старшим коэффициентом* (в нашем случае это a_0). Слагаемое, не содержащее переменной x, называют *свободным членом* многочлена (в нашем случае это a_n). Например, старший коэффициент многочлена $x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x$ равен 1, а свободный член равен нулю.

Заметим, что значение многочлена с переменной x при $x = 0$ равно свободному члену этого многочлена, а при $x = 1$ — сумме его коэффициентов.

Упражнения

341. Укажите многочлены, записанные в стандартном виде:

а) $12a - aba + 2ab^2 - 13ab + b^2$;

б) $-a^2b + ab^2 - 13ab + b^2 + 12a + ab^2$;

в) $-a^2b + 2ab^2 - 13ab + 12a + b^2$;

г) $3a^3b - ab^3 + 4ab^3 - ab + b$;

д) $5a^4b - a^3b^2 + 3ab^3 + ab - 1$;

е) $-3a^5b + 2a^2b^2 - ab + 6a + b$.

342. Приведите подобные члены многочлена:

а) $0{,}3x^2 - x^2 + 0{,}9x^2 + 3x^2$;

б) $y^3 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}y^3 + 4y^3$;

в) $-xy^2 - xy^2 - 0{,}8xy^2 + 1{,}9xy^2$;

г) $\frac{1}{3}xy + xy - \frac{1}{6}xy + 3xy$.

343. Приведите подобные члены многочлена:

а) $-p^3 + 4p^2 - 12p^3 + 14p^3 - 11p^2 - 6p$;

б) $1 - 4m^6 + 2 - m^6 - m^5 + 12m^5$;

в) $4{,}4x^2y - 40xy^2 + 3{,}6xy^2 - 1{,}4x^2y - 26$;

г) $0{,}12a^3b - 1{,}1ab^3 - 0{,}6ab^3 + 0{,}08a^3b - 2a^3b$.

344. Найдите значение многочлена:

а) $1{,}2x^4 + x^2 + 0{,}1x^4 - 8 - 1{,}3x^4 + 0{,}2x^2$ при $x = 14$;

б) $\frac{1}{8}y^5 + \frac{1}{12} - \frac{1}{8}y^5 - y^4 - \frac{1}{3}y^4$ при $y = -2$.

345. Может ли быть отрицательным числом значение многочлена:

а) $0{,}3x^6 - 0{,}7x^5 - 8{,}6x^4 - x^6 + x^5 - 0{,}3x^5 + 1$;

б) $12\frac{5}{6}a^4 + 5\frac{5}{8}a^3 - 12\frac{1}{3}a^4 - 3\frac{3}{4}a^3 - 1\frac{7}{8}a^3 + 6$?

346. Замените M одночленом так, чтобы после приведения подобных членов получался многочлен, не содержащий b^3:

а) $M + 0{,}1b - 0{,}47b^2 + 0{,}8b^3 - 1{,}89b^2 - 1{,}16b^3$;

б) $M - \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{7}b^4 - \frac{1}{12}b^3 - b^4 + 3\frac{1}{6}b^3 + 1$.

347. Представьте в стандартном виде многочлен:

а) $23x^3 - 14xxy + 6x^3 - 2x^2 \cdot 8y + 4$;

б) $2y \cdot y^3 - 3y^2 \cdot 4y^2 + 6y^4 - 8y^4 - 11$;

в) $5x \cdot (-4x^4) - 2x^2 \cdot 3x^3 + 27x^5 - x^6$;

г) $16a \cdot (-a^2b) + 18a^3b - 12aab + 14a^2b$.

348. Упростите выражение:

а) $12x \cdot x^3 - 6x^2 \cdot x^2 - 16x^4 + 4x^2 - x^2$;

б) $0{,}3a \cdot 4b^2 - 1{,}2ab \cdot b + 4{,}8ab^3 - 6a \cdot 0{,}8b^3$;

в) $5x^2 \cdot 2y - 10xy \cdot 4x - 14x^2y + 18x^2y$;

г) $0{,}8y^ny^2 - 0{,}01y \cdot 12y^{n+1} - 1{,}6y^{n+2} - 1$;

д) $3{,}2x^2x^nx - 3{,}4x^{n+1} \cdot 2x^2 - 4{,}8x^{n+2} \cdot 0{,}1x + x^{n+3}$.

349. Дан многочлен от одной переменной $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Укажите:

а) старший коэффициент; б) свободный член.

350. Чему равно значение многочлена $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ при:

а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = -1$?

351. Найдите при $x = -1$ значение многочлена:

а) $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$;

б) $4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 6$;

в) $x^4 + 2x^3 + x + 1$.

352. Сколько членов может иметь многочлен стандартного вида от одной переменной, если его степень равна:

а) 52; б) 200; в) m?

353. Запишите множество, состоящее из коэффициентов многочлена:

а) $-3x^2 - 2x + 1$; в) $x^{100} - 1$;

б) $x^4 - x^2 + 2x - 2$; г) 3.

354. Найдите коэффициенты многочлена $kx^3 - 2kx + 3k$, где x — переменная, а k — некоторое число, если значение многочлена:

а) при $x = 0$ равно -6; в) при $x = -1$ равно -4;

б) при $x = 1$ равно -6; г) при $x = 2$ равно 7.

355. Известно, что значения многочленов

$$x^3 - 2ax^2 + 3ax + 2 \text{ и } 2x^4 - 4x^3 - ax - 3a,$$

где x — переменная, a — некоторое число, при $x = 1$ равны. Найдите значение a.

356. Длина прямоугольника равна a м, а ширина b м. На сколько квадратных метров увеличится его площадь, если длину увеличить на 10%, а ширину — на 15%?

357. На прямоугольный лист картона, длина которого равна x см, а ширина y см, наклеили открытку. Длина открытки составляет 80% длины листа, а ширина — 70% ширины листа. Чему равна площадь оставшейся части картона?

358. Какова степень многочлена:

а) $3x^8 - x^3 - x^8 + 6x - 2x^8 - 1$;

б) $xy + 12x^5y - 10x^5y - 6 - 2x^5y$;

в) $4x^3 - 2x^2 + 3 - 4x^3 + 2x^2$;

г) $2x - 2xy^2 + 2y - x - y + 2xy^2 + 3$;

д) $x^2y - xy^2 - x^2y + xy^2$;

е) $-x^ny^m + x^{n-1}y^{m+1} - x^{n-2}y^{m+2} + 5xy - 5$, где $n, m \in N$ и $n > 2$, $m > 2$?

359. Составьте многочлен с переменными a и b, степень которого равна:

а) 5; б) 4; в) 2; г) 1.

360. Подберите какие-либо значения m и n, при которых степень многочлена $x^my^n - 14xy^2 - xy^3 + xy - 1$ равна:

а) 8; б) 5; в) 4; г) 3.

361. Даны многочлены:

а) $3a^2 - 4b - a^2 + 17b - 12b$;

б) $1{,}2a^2 - b + 0{,}8a^2 - 1{,}6b + 3{,}6b$;

в) $3{,}2b + 0{,}5a^2 - a^2 - 1{,}5a^2 + 2{,}8b - 5b$;

г) $-b - 7{,}5b + a^2 - 4a^2 + 5a^2 + 9{,}5b$.

Выберите из них те, которые тождественно равны многочлену $2a^2 + b$.

362. При каком значении параметра a данные многочлены тождественно равны:

а) $2x^3 + 3x^2 - x + 1$ и $ax^3 + 3x^2 - x + 1$;

б) $x^3 + 3x^2 - x + a$ и $ax^3 + 3x^2 - x + 1$;

в) $(2a - 1)x^2 - (2a + 1)x + 1$ и $ax^2 - (4a - 1)x + 1$;

г) $x^2 - a^2 \cdot x + 2a$ и $x^2 + ax - 2a$?

Упражнения для повторения

363. Автомобиль движется со скоростью a км/ч. Выразите его скорость в метрах в секунду.

364. Бак кубической формы заполняется водой за 20 мин. Сколько потребуется времени, чтобы заполнить водой бак, имеющий форму куба с ребром, вдвое бо́льшим ребра данного куба?

365. На покраску куба израсходовали 75 г краски. Сколько краски потребуется, чтобы покрасить куб, ребро которого в четыре раза больше ребра данного куба?

? Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение многочлена. Приведите пример многочлена и назовите его члены.
2. Какие члены многочлена называются подобными?
3. Приведите пример многочлена с одной переменной и назовите его старший коэффициент, свободный член. Чему равно значение многочлена с одной переменной, если значение переменной:

   а) равно 0; б) равно 1?
4. На примере многочлена $2a^2x \cdot (-3ax) - 4a^3x^2 + x^4$ объясните, как привести многочлен к стандартному виду.
5. Что называется степенью многочлена? Определите степень многочлена:

   а) $x^2y - xy + 1$; б) $x^3 + 5x^2 - x^3 + x - 2$.

§ 6. Сумма, разность и произведение многочленов

13. Сложение и вычитание многочленов

Пусть требуется сложить многочлены $a^3 - 7a^2 - 1$ и $3a^3 - a^2 + 6$. Составим их сумму:

$$(a^3 - 7a^2 - 1) + (3a^3 - a^2 + 6).$$

Из сочетательного свойства сложения следует: для того чтобы прибавить сумму, надо прибавить каждое слагаемое, входящее в эту сумму. Отсюда получается правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «плюс»:

если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки.

Воспользовавшись этим правилом, раскроем скобки в составленной сумме и приведём подобные члены полученного многочлена:

$$(a^3 - 7a^2 - 1) + (3a^3 - a^2 + 6) =$$
$$= a^3 - 7a^2 - 1 + 3a^3 - a^2 + 6 = 4a^3 - 8a^2 + 5.$$

Вычтем теперь из многочлена $5b^2 - b + 1$ многочлен $8b^2 + 3b - 6$. Составим разность этих многочленов:

$$(5b^2 - b + 1) - (8b^2 + 3b - 6).$$

Из свойств действий с числами следует: для того чтобы вычесть сумму, надо вычесть каждое слагаемое, входящее в эту сумму. Так как вычитание некоторого числа можно заменить прибавлением числа, ему противоположного, то вычитание суммы можно заменить прибавлением чисел, противоположных слагаемым. Отсюда получается правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «минус»:

если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого на противоположный.

Пользуясь этим правилом, раскроем скобки в составленной разности и приведём подобные члены полученного многочлена:

$$(5b^2 - b + 1) - (8b^2 + 3b - 6) =$$
$$= 5b^2 - b + 1 - 8b^2 - 3b + 6 = -3b^2 - 4b + 7.$$

В рассмотренных примерах сумму и разность многочленов мы представили в виде многочленов. Вообще сумму или разность любых многочленов можно представить в виде многочлена. При этом степень получившегося многочлена будет не больше степени многочленов-слагаемых.

Иногда требуется решить обратную задачу — представить многочлен в виде суммы или разности многочленов. При этом пользуются следующими правилами:

если перед скобками ставится знак «плюс», то члены, заключаемые в скобки, записываются с теми же знаками;
если перед скобками ставится знак «минус», то у всех членов, заключаемых в скобки, нужно изменить знак на противоположный.

Представим, например, многочлен $5x - 3y + 1$ в виде суммы двух слагаемых, одно из которых равно $5x$:

$$5x - 3y + 1 = 5x + (-3y + 1).$$

Представим теперь тот же многочлен в виде разности, в которой уменьшаемое равно $5x$:

$$5x - 3y + 1 = 5x - (3y - 1).$$

Упражнения

366. Преобразуйте в многочлен стандартного вида сумму и разность многочленов:

а) $3x^2 - x + 1$ и $x^3 + x$; б) $2a - ab$ и $3ab + a$.

367. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $15a^3 + (a^4 - 3a^3)$;

б) $12b^6 - (b^6 + 11b^5)$;

в) $5{,}2ab - (ab + 1{,}4)$;

г) $-ab - (a^2 + ab) + (2ab - a^2)$;

д) $0{,}6x^2 + (0{,}4x^2 - x) - (x^2 + x)$;

е) $\frac{1}{3}a - \left(b - \frac{2}{3}a\right) + \left(b - \frac{1}{6}a\right)$.

368. Коллекция марок расклеена в четыре альбома. В первом альбоме содержится a марок, во втором — втрое больше, чем в первом, и на 7 больше, чем в третьем, а в четвёртом альбоме на 11 марок меньше, чем в третьем. Сколько марок в коллекции?

369. Докажите, что сумма скорости движения парохода по течению реки и скорости против течения реки равна удвоенной скорости движения парохода в стоячей воде, а их разность равна удвоенной скорости течения.

370. Лыжники в первый день прошли a км, а в каждый из последующих дней проходили на 2 км больше, чем в предыдущий. Какое расстояние прошли лыжники за пять дней?

371. Артель изготовила в январе a изделий, в феврале на 5% больше, а в марте на 8 изделий меньше, чем в первые два месяца вместе. Сколько изделий изготовила артель в первом квартале?

372. С первого участка собрали a кг картофеля, со второго — на 15% меньше, а с третьего — на 40 кг меньше, чем с первых двух. Сколько картофеля собрали с трёх участков?

373. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $(2c + 1) - (4 - c) + (12 - 5c)$;

б) $-(x^2 + x - 4) - (3x + 4) + (x^2 - 1)$;

в) $-(y^2 + y) + (4y + y^2) - 16y$;

г) $(12ab - a^2) - (11ab + a^2) + (ab - 6{,}2a^2)$.

374. Замените M таким многочленом, чтобы полученное равенство было тождеством:

а) $M + (x^2 - y) = 2x^2 + 3y - 1$;

б) $M - (b^2 + 3bc) = 2b^2 + c$;

в) $(a^2 - ab + b^2) - M = 2a^2 + 2b^2$.

375. Упростите выражение:

а) $5x^2 - (3x^2 - (x^2 + x) + (2x - 1))$;

б) $4x - (-(2x - 1) + (x - 4)) + 1$;

в) $1 - (4ab^2 - (2a^2b - ab) + (ab^2 + 2a^2b) + ab)$.

376. Пусть $A = x^2 - 2xy + y^2$, $B = 2x^2 - y^2$, $C = x^2 - 3xy$. Упростите выражение:

а) $A + B - C$;

б) $A - B + C$;

в) $-A + B - C$.

377. Докажите, что тождественно равны выражения:

а) $(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 - b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 - c^2)$ и $a^2 - b^2 + 3c^2$;

б) $(a^3 - b^2 - c) - (3a^3 - 2b^2 + c) + (2a^3 - b^2 + 2c)$ и 0.

378. Какой многочлен надо прибавить к многочлену $x^2 - 2x + 9$, чтобы получить:

а) 9; в) $x^2 - x$;

б) x^2; г) $x^2 - 2x - 11$?

379. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $6x^2 - (7x^2 - x)$ при $x = 0{,}1$;

б) $-(12x - 1) + (9x + 4)$ при $x = 11{,}2$;

в) $(a^2 - a) - (3a + a^2)$ при $a = 9{,}21$;

г) $-(c^3 - 1) + (c^3 + c - 1)$ при $c = 12{,}718$.

380. Упростите выражение:

а) $(3a^2 - ab - b^2) - (-a^2 + b^2 - 4ab) + (4a^2 - 3ab + 2b^2)$;

б) $-(x^2 - x + x^3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x) + (3x^3 - 5x^2 - x)$;

в) $-(xy - 1) + (12xy + x^2 - 4) - (xy + x^2 - 2)$;

г) $(a^2 - 0{,}5a - 1) - (1{,}5a^2 + a + 2) + (0{,}5a^2 + 3)$.

381. Найдите значение выражения

$$(5a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 + b^2) - (4a^2 - 5ab + 1),$$

если:

а) $a = 1{,}2$, $a + b = 6{,}2$; б) $a = \frac{1}{3}$, $a + b = 1$.

382. Найдите значение выражения

$$-(x^2 - xy - 7) + (2x^2 + 2xy - 2) - (x^2 - 11),$$

если:

а) $x = 1{,}7$, $x + y = 0{,}7$; б) $x = -1{,}5$, $x + y = 0{,}5$.

383. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $-(x^2 + 8x - 1) + (4x^2 - x) - (3x^2 - 9x + 16)$;

б) $(a^2 - 24a + 8) + (12a - a^2) - (11 - 12a)$.

384. Значения каких переменных надо знать, чтобы найти значение выражения:

а) $(12a^2 + 4ab + 1) - (3a^2 + ab - 2) + (11a^2 - 3ab + 2)$;

б) $(15c^3 - c^2 + b) - (10c^3 + c^2) + (12b^3 - 5c^2)$?

385. Найдите трёхчлен стандартного вида, который надо прибавить к сумме многочленов

$$1{,}7a^2b + ab - b^3 + 4a \text{ и } 6b^3 + 8a^2b - 2ab - 5a,$$

чтобы получить выражение, значение которого не зависит от b.

386. Докажите, что:

а) сумма пяти последовательных нечётных чисел делится на 5;

б) сумма шести последовательных чётных чисел не делится на 12.

387. При каких целых значениях a, удовлетворяющих условию $|a| < 20$, значение выражения

$$(13n^2 + 5n + 4) - (n^2 + an - 1) + (2n^2 - 5n + 2)$$

кратно 7 при любом целом n?

388. Представьте в виде многочлена сумму чисел:

а) $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$;

б) $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$.

389. Представьте многочлен $12a^3 - a^2 + 6a - 1$:

а) в виде суммы двух двучленов, один из которых $12a^3 + 6a$;

б) в виде разности двух двучленов, в которой уменьшаемое равно $12a^3 - 1$.

390. Представьте многочлен $15x^2 - xy + 16y^2 - 6$ в виде разности двух многочленов, один из которых не содержит y.

391. Представьте двумя способами многочлен

$$a^3 - 5a^2 + 7a - 1:$$

а) в виде суммы двух двучленов;

б) в виде разности одночлена и трёхчлена.

392. Известно, что каждое из целых чисел a и b не делится на 7, а их сумма делится на 7. Делится ли на 7 число:

а) $2a + b$; б) $a - b$?

Упражнения для повторения

393. Задайте перечислением элементов множество A двузначных натуральных чисел, оканчивающихся цифрой 3. Выделите из множества A:
а) подмножество B простых чисел;
б) подмножество C чисел, кратных 3;
в) подмножество K чисел, дающих при делении на 3 остаток 1.

394. Для школьной библиотеки купили 64 учебника, из них 34 учебника по алгебре, а остальные — по геометрии. Учебник по алгебре стоит a р., а учебник по геометрии на b р. дороже. Сколько денег уплатили за покупку?

395. Из многочленов $1 + x^2 + x^4$, $5x^6 - x^3 - 1$, $x^8 + x^2$, $x^{12} - 1$, $2x - x^4$ выберите те, значения которых не изменяются при замене значения переменной x на противоположное.

396. Выполните умножение одночленов:
а) $3a^2b \cdot (-a^4b^5) \cdot 1{,}5a^{10}b^2$; в) $3x^{n+2} \cdot 0{,}2x^5$;
б) $-xy \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3y\right) \cdot 9x^4y^5$; г) $-2a^{n+1} \cdot 0{,}01a$.

14. Умножение одночлена на многочлен

Пусть требуется умножить одночлен $2a^3$ на многочлен $3a^4 - 4a^2 + a$. Составим произведение $2a^3(3a^4 - 4a^2 + a)$.

Из распределительного свойства умножения следует: для того чтобы число умножить на сумму, надо умножить его на каждое слагаемое и результаты сложить. Воспользовавшись распределительным свойством умножения, преобразуем составленное произведение:

$$2a^3(3a^4 - 4a^2 + a) = 2a^3 \cdot 3a^4 - 2a^3 \cdot 4a^2 + 2a^3 \cdot a = 6a^7 - 8a^5 + 2a^4.$$

При умножении одночлена на многочлен пользуются следующим правилом:

чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Распределительный закон умножения относительно сложения, на котором основано правило умножения одночлена на многочлен, древнегреческий математик Евклид в III в. до н. э. доказывал на языке «геометрической алгебры»: если одна из сторон прямоугольника является суммой нескольких отрезков, то площадь всего прямоугольника можно найти как сумму площадей его частей. Например, если $a = a_1 + a_2 + a_3$ — одна сторона прямоугольника, b — его вторая сторона, то площадь прямоугольника равна $ab = (a_1 + a_2 + a_3)b = a_1b + a_2b + a_3b$. Если считать $a = a_1 + a_2 + a_3$ многочленом, а b одночленом, то мы получим правило умножения многочлена на одночлен.

В рассмотренном примере мы представили произведение одночлена и многочлена в виде многочлена. Вообще произведение одночлена и многочлена всегда можно представить в виде многочлена. Причём степень произведения будет равна сумме степеней одночлена и данного многочлена.

Пример 1. Умножим одночлен $-3xy$ на многочлен $2x^2y + 4xy^2 - 1$. Имеем

$$-3xy \cdot (2x^2y + 4xy^2 - 1) =$$
$$= -3xy \cdot 2x^2y + (-3xy) \cdot 4xy^2 + (-3xy) \cdot (-1) =$$
$$= -6x^3y^2 - 12x^2y^3 + 3xy.$$

Записать решение можно короче, не выписывая промежуточные результаты:

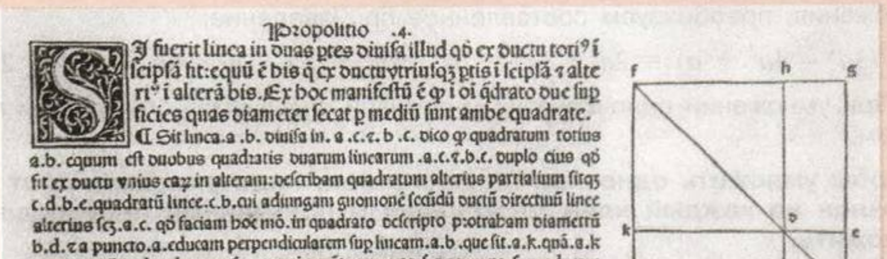
$$-3xy \cdot (2x^2y + 4xy^2 - 1) =$$
$$= -6x^3y^2 - 12x^2y^3 + 3xy.$$

Пример 2. Упростим выражение

$$4a(2a + 5) + 2a(3a - 1) - 1{,}5a(2a - 4).$$

Каждое из произведений преобразуем в многочлен и сложим полученные многочлены:

$$4a(2a + 5) + 2a(3a - 1) - 1{,}5a(2a - 4) =$$
$$= 8a^2 + 20a + 6a^2 - 2a - 3a^2 + 6a =$$
$$= 11a^2 + 24a.$$



Propositio .4.

Si fuerit linea in duas ptes divisa illud qd ex ductu toti⁹ i seipsã fit: equũ ẽ bis q̃ ex ductu vtriusqȝ ptis i seipsã ⁊ alteri⁹ i alterã bis. Ex hoc manifestũ ẽ q̄ i oi q̃drato duc sup ficies quas diameter secat p mediũ sunt ambe quadrate.

Sit linea .a .b. divisa in. a .c. ⁊. b .c. dico q̄ quadratum totius a.b. equum est duobus quadratis duarum linearum .a.c.⁊.b.c. duplo eius qd fit ex ductu vnius ea⁊ in alteram: describam quadratum alterius partialium sitqȝ c.d.b.e. quadratũ linee .c.b. cui adiungam gnomonẽ secũdũ ductũ directuñ linee alterius scȝ .a.c. qd faciam hoc mõ. in quadrato descripto protrabam diametrũ b.d. ⁊ a puncto .a. educam perpendicularem sup lineam .a.b .que sit .a.k. quã .a.k ⁊ diametrũ .b.d. pducam vsqȝ quo cõcurrãt in puncto .f. ⁊ a puncto .f. producam f.b. equidistantẽ linee .a.b. quã .f.b. ⁊ .b.e. producam vsqȝ quo concurrãt i pũcto g. ⁊ producã .c.d. vsqȝ ad .b. ⁊ .c.d. vsqȝ ad .k. Et quia duo latera .d.e. ⁊ .c. b. triangli .d.c.b. sunt equalia: erũt per .5. primi duo anguli .c.d.b. ⁊ .e.b.d. equales: ⁊ q̄

Фрагмент страницы из II книги Евклида «Начала» с геометрическим доказательством распределительного закона умножения относительно сложения, III в. до н. э., издание 1482 г.

Упражнения

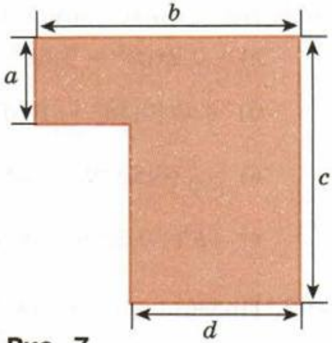


Рис. 7

397. Упростите выражение:

а) $5(2 - a) - 4(3a + 1)$;
б) $18(b - 3) + 6(3b + 1)$;
в) $1,1(1 - x) + 1,2(1 + x)$;
г) $6p - 2(p + 1) + 4(p - 8)$;
д) $-2 + 3(3c - 2) - 2(c - 1)$;
е) $-1,6y - 0,3(y + 4) + 0,4(2y - 1)$.

398. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $3(5x - 1) - 14(x + 8)$ при $x = 172$;
б) $15a - 3(2a - 1) + 2(a - 2)$ при $a = -3$;
в) $-11b + 5(2b - 1) - 6(b + 2)$ при $b = -4$;
г) $12(3c - 1) - 35c + 4(c + 6)$ при $c = -0,2$.

399. Составьте два выражения для вычисления площади фигуры, изображённой на рисунке 7, и докажите, что они тождественно равны.

400. В однокомнатной квартире длина комнаты на 1,6 м больше ширины, а площадь остальных помещений составляет 75% площади комнаты. Какова общая площадь квартиры, если длина комнаты равна a м?

401. Велосипедист ехал в гору со скоростью 12 км/ч, под гору со скоростью 18 км/ч, а по ровной местности со скоростью 15 км/ч. На путь в гору он затратил b ч, на путь под гору — на 1 ч 20 мин больше, чем на путь в гору, а на путь по ровной местности — в 1,2 раза больше, чем на путь в гору и под гору вместе. Найдите длину маршрута велосипедиста.

402. Представьте в виде многочлена:

а) $3ab(a + b)$;
б) $-a^2(a^2 - b^2)$;
в) $(x^2 + 2xy) \cdot (-xy)$;
г) $(ab + a - b) \cdot 3a^2b$;
д) $-0,5x^2y^2(2x + 2y - 1)$;
е) $(-a^2 - 6ab + b^2) \cdot \left(-\frac{1}{3}ab\right)$.

403. Выполните умножение:

а) $2a^5(-3a + 4b)$;
б) $-0,5xy(x^2 + y^2)$;
в) $(8c - 6b) \cdot (-0,5bc)$;
г) $(-2a^2b + 3ab - 7a) \cdot (-ab)$;
д) $-x(x^5 - x^4 + 1)$;
е) $(3y^3 + y^2 - 6y) \cdot \left(-\frac{1}{3}y^2\right)$.

404. Выполните умножение:

а) $-0,2x(x^4 - 1,6x^3 + 2,3x)x^2$;

б) $\frac{2}{3}ab(0,3a^2 - 1,2ab + 1)a^3$;

в) $-\frac{1}{9}(0,5a^2b^2 - ab + 0,9)(-ab)$;

г) $-b^3(-0,3a^2b - 0,4ab + 1) \cdot \frac{1}{6}a^2b^2$.

405. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $-0,2x(x^4 - x(1,6x^2 - 2,3))x^2$;

б) $\frac{2}{3}ab\left(0,3a^2 - 1,2\left(ab - \frac{5}{6}\right)\right)a^3$;

в) $-\frac{1}{9}a(0,5ab(ab - 2) + 0,9)(-b)$;

г) $-b^3(-0,1ab(3a - 4) + 1) \cdot \frac{1}{6}a^2b^2$.

406. Представьте в виде многочлена:

а) $4x^ny(3x - 2y^n)$;

б) $\left(\frac{1}{3}a^nb - \frac{1}{9}ab^n\right)(-18ab)$;

в) $(14a^nb - 7ab^{n+1}) \cdot \left(-\frac{1}{7}ab^n\right)$;

г) $-144a^{2n}b^{3n}\left(\frac{1}{6}a^nb^n - \frac{1}{2}ab\right)$.

407. Замените знаки * одночленами так, чтобы полученное равенство было тождеством:

а) $* \cdot (a^2 + 2ab) = 1,7a^3 + 3,4a^2b$;

б) $(0,3ax - 0,1a^2x + a) \cdot * = 0,6a^2x^2 - 0,2a^3x^2 + *$;

в) $* \cdot (10a^4 + 15a^3 + 20a^2) = * + * + 200a^8$;

г) $(0,3ax + a^2x + a^3) \cdot * = 0,3a^5x^6 + * + *$.

408. Упростите выражение, если $n > 1$:

а) $\left(0,3a^{n+1} - \frac{1}{12}a^n - 0,2a^{n-1}\right) \cdot 24a^n - 6a^n\left(\frac{1}{6}a^{n-1} - a^n + 0,3a^{n+1}\right)$;

б) $\left(-1\frac{1}{9}b^{n-1} + \frac{1}{3}b^n - 6b^3\right) \cdot 0,9b^{n+1} - 0,8b^n\left(\frac{7}{8}b^n - b^{n+1} - 1\frac{1}{8}b^4\right)$.

409. Упростите выражение:

а) $12p^2 + 5p(1 - p)$;

б) $3a^3 - 2a(1 + 2a^2)$;

в) $-15y^3 - 3y(1 - 5y^2)$;

г) $6m(m^3 - n^3) - 1,2m^4$;

д) $6a(a - 1) - 2a^2(3 - a)$;

е) $6p(5p^2 + p) + 15p^2(2 - p)$;

ж) $-3m(m + n^2) + m(3m - n^2)$;

з) $2y(y^2 - x) - 2x(x^2 - y)$.

410. Упростите выражение:

а) $9m^2 - 2m(m - 3) + 7m(1 - m)$;

б) $5a^4 - 8a^3(a - 3) + (a^2 + 5a) \cdot 5a^2$;

в) $-2x^3(3 + 16x^2) - (x^2 + 4) \cdot 3x^3 + (7x - 1) \cdot 5x^4$;

г) $-12{,}5y + (-y^3 + 2y^2 - 5) \cdot (-2{,}5y) - 2{,}5y \cdot y^3$.

411. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $3x(1 - 2x) + 2x(3x - 1) = -4$;

б) $4x(3x + 2) - 3x(4x + 3) = 12$;

в) $2x^2(2 - 3x^2) - 3x^2(4 - 2x^2) = -8$;

г) $-3x(3 - 2x - 4x^2) + 4x(2{,}25 - x - 3x^2) = -3$?

412. Вычислите значение выражения:

а) $5(0{,}16x^2 - 0{,}9x + 2{,}4) - 4(0{,}2x^2 + 1{,}5x - 1)$ при $x = 42$;

б) $3(1{,}6a^2 - 0{,}5a + 1{,}4) - 4(1{,}2a^2 + 0{,}6a + 0{,}3)$ при $a = -80$.

413. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right) \cdot 6ab - 12ab\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b\right)$ при $a = -1{,}8$; $b = -0{,}3$;

б) $-4xy\left(\frac{1}{2}xy - 1\right) + 8x^2\left(\frac{1}{4}y^2 - 2\right)$ при $x = \frac{1}{4}$; $y = -2$.

414. Из данных выражений выберите те, значения которых не зависят от a:

а) $12a(a + 4) - 3a(4a - 1) - 50(a + 2) - a$;

б) $9a(4b + 1) - 12ab(3 - a) - 3a(4ab + 3) + b^2$;

в) $-a(6x^2 + a) + 2a(a + 3x^2) - a(a + 1) - (2 - a)$;

г) $8a(a - x) - 2a(4a + x) - 6a(a - x) + 3x$.

415. Докажите, что данное равенство является тождеством:

а) $3(2a - b) - 4(a - 3b) - (a + 3b) = a + 6b$;

б) $-5a(3a - 1) + 6a(a + 1) - a(1 - 9a) = 10a$.

416. Не выполняя умножения одночлена на многочлен, найдите степень многочлена и его старший коэффициент:

а) $-3x^2(4x^8 - 2x^5 + 3x)$;

б) $5x^{100}(12x^{20} - 15x^{10} - 18x + 1)$;

в) $(-x^{2n} - 2x^n + 3) \cdot 4x^k$;

г) $((m + 3) \cdot x^{m+3}) \cdot (mx^m + (m - 1)x^{m-1} + \ldots + 2x^2 + x)$, где $m \in N$, $m > 4$.

417. При каких значениях параметра k коэффициент:

а) при x^2 в стандартном виде многочлена, тождественно равного выражению $(k + 1)x^2 \cdot (3x^2 - 4kx - 2)$, равен 4;

б) при x^3 в стандартном виде многочлена, тождественно равного выражению $kx^2 \cdot (2x^2 - kx + 3)$, равен -4?

418. При каком значении параметра a многочлен $2x^3 + 3ax^2 - ax - 1$ при $x = 1$ и $x = -1$ принимает одинаковые значения?

419. При каком натуральном значении k сумма коэффициентов многочлена, тождественно равного выражению $x^2(x^2 + kx + 1) - 3x(x - 2)$, равна:

а) 0; б) 5; в) $-4k$?

420. Замените n каким-либо натуральным числом так, чтобы при любом $x \in N$ значение выражения:

а) $3x(x^3 - 5x^2 - 1) - 11x^2(x^2 - x + 8) - 5(x - 1) + n$ делилось на 4;

б) $x^6(x - 1) - x^5(x^2 - x - 2) + 10(x^5 + 1) + n$ при делении на 6 давало остаток 1.

Упражнения для повторения

421. В выборке 4; 4; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 8 одна варианта пропущена. Найдите её, если:

а) среднее арифметическое выборки равно 5,8;

б) размах выборки равен 5;

в) выборка имеет две моды и её среднее арифметическое выражается целым числом.

422. Вычислите:

а) $7{,}2 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right) + 8{,}4$; б) $\frac{5}{6} \cdot 0{,}36 - \frac{1}{7} \cdot 0{,}14$.

423. Для школьной столовой купили 105 тарелок, из них 35 глубоких, а остальные — мелкие. Глубокая тарелка стоит a р., а мелкая — на 20% дешевле. Сколько денег уплатили за покупку?

424. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5^3 \cdot 7^4}{35^3}$; б) $\frac{22^6}{4^3 \cdot 11^7}$; в) $\frac{33^5}{9^3 \cdot 121^2}$.

425. Упростите выражение:

а) $-\frac{1}{9}a^2b^6 \cdot (-3a^3b)^4$; б) $\frac{1}{8}x^7y^6 \cdot (-2xy^3)^5$.

426. Каждый из одночленов $6a^3b$, $-12a^2b^2$, $3ab$ представьте в виде произведения двух множителей, один из которых равен $3ab$.

15. Умножение многочлена на многочлен

Пусть требуется умножить многочлен $a + b$ на многочлен $c + d$. Составим произведение этих многочленов: $(a + b)(c + d)$.

Обозначим двучлен $a + b$ буквой x и воспользуемся правилом умножения одночлена на многочлен: $(a + b)(c + d) = x(c + d) = xc + xd$.

В выражение $xc + xd$ подставим вместо x многочлен $a + b$ и снова воспользуемся правилом умножения одночлена на многочлен:

$$xc + xd = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Итак,

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Этот же результат для положительных a, b, c, d можно увидеть на рисунке 8, интерпретируя вслед за Евклидом произведение двучленов как площадь прямоугольника.

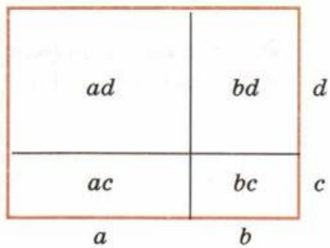


Рис. 8

Произведение $(a + b)(c + d)$ мы представили в виде многочлена $ac + bc + ad + bd$. Этот многочлен является суммой всех одночленов, которые получаются при умножении каждого члена многочлена $a + b$ на каждый член многочлена $c + d$.

Мы пришли к следующему правилу:

чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

При умножении многочлена $a + b$ на многочлен $c + d$ мы снова получили многочлен. Вообще произведение двух любых многочленов можно представить в виде многочлена. При этом если многочлен, содержащий m членов, умножается на многочлен, содержащий n членов, то в произведении получается многочлен, состоящий из mn членов (до приведения подобных членов). Этим удобно пользоваться для самоконтроля.

Евклид (около 365 — около 300 г. до н. э.), древнегреческий математик, автор самого известного математического сочинения — «Начала».

Пример 1. Умножим многочлен $3a^2 - 4ab + b^2$ на многочлен $2a - b$.

Составим произведение этих многочленов и преобразуем его в многочлен, умножая каждый член первого многочлена на каждый член второго. Получим

$$(3a^2 - 4ab + b^2) \cdot (2a - b) =$$
$$= 3a^2 \cdot 2a - 4ab \cdot 2a + b^2 \cdot 2a + 3a^2 \cdot (-b) + (-4ab)(-b) + b^2 \cdot (-b) =$$
$$= 6a^3 - 8a^2b + 2ab^2 - 3a^2b + 4ab^2 - b^3 =$$
$$= 6a^3 - 11a^2b + 6ab^2 - b^3.$$

Обычно используют более краткую запись:

$$(3a^2 - 4ab + b^2) \cdot (2a - b) = 6a^3 - 8a^2b + 2ab^2 - 3a^2b + 4ab^2 - b^3 =$$
$$= 6a^3 - 11a^2b + 6ab^2 - b^3.$$

Умножение многочленов можно выполнять в столбик.

Например,

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 3a^2 - 4ab + b^2 \\ 2a - b \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} -3a^2b + 4ab^2 - b^3 \\ 6a^3 - 8a^2b + 2ab^2 \end{array} \\ \hline 6a^3 - 11a^2b + 6ab^2 - b^3 \end{array}$$

Из приведённого примера можно сделать полезный вывод: степень произведения многочленов равна сумме степеней многочленов-множителей. Действительно, первый множитель — многочлен степени 2, второй — двучлен степени 1, а их произведение — многочлен степени 2 + 1 = 3.

Рассмотрим пример умножения двух многочленов с одной переменной.

Пример 2. Представим в виде многочлена стандартного вида произведение многочленов $2x^2 - 3x + 1$ и $5x + 4$.

$$(2x^2 - 3x + 1)(5x + 4) = 10x^3 + 8x^2 - 15x^2 - 12x + 5x + 4 =$$
$$= 10x^3 - 7x^2 - 7x + 4.$$

Старшие коэффициенты многочленов-множителей равны 2 и 5, а старший коэффициент произведения равен 10. Свободные члены многочленов-множителей равны 1 и 4, а свободный член произведения многочленов равен 4. Легко видеть, что старший коэффициент произведения многочленов равен произведению старших коэффициентов множителей. Аналогично, свободный член произведения многочленов равен произведению свободных членов многочленов-множителей.

Пример 3. Упростим выражение $(3x - 4)(2x + 1) - (x - 2)(6x + 3)$.

Умножим многочлен $3x - 4$ на многочлен $2x + 1$, а многочлен $x - 2$ на многочлен $6x + 3$ и вычтем из первого произведения второе:

$$(3x - 4)(2x + 1) - (x - 2)(6x + 3) =$$
$$= (6x^2 - 8x + 3x - 4) - (6x^2 + 3x - 12x - 6) =$$
$$= 6x^2 - 8x + 3x - 4 - 6x^2 - 3x + 12x + 6 = 4x + 2.$$

Записать решение можно короче, сразу раскрывая скобки:

$$(3x - 4)(2x + 1) - (x - 2)(6x + 3) =$$
$$= 6x^2 - 8x + 3x - 4 - 6x^2 - 3x + 12x + 6 = 4x + 2.$$

Пример 4. Докажем, что при любом $n \in N$ значение выражения

$$(n + 8)(n - 4) - (n + 2)(n - 16)$$

делится на 18.

Преобразуем данное выражение:

$$(n + 8)(n - 4) - (n + 2)(n - 16) =$$
$$= n^2 + 8n - 4n - 32 - n^2 - 2n + 16n + 32 = 18n.$$

При любом $n \in N$ произведение $18n$ делится на 18, а следовательно, делится на 18 и значение заданного выражения.

Пример 5. Докажем тождество

$$(a^3 + b^3 + c^3 + 8abc)(a^3 + b^3 + c^3 - 7abc) -$$
$$- (a^3 + b^3 + c^3)(a^3 + b^3 + c^3 + abc) = -56a^2b^2c^2.$$

Для доказательства тождества надо преобразовать его левую часть. Преобразования можно существенно упростить, если заметить, что в ней переменные a, b и c встречаются только в выражениях $a^3 + b^3 + c^3$ и abc. Введём новые переменные: $x = a^3 + b^3 + c^3$, $y = abc$ и упростим получившееся выражение:

$$(x + 8y)(x - 7y) - x(x + y) =$$
$$= x^2 + 8xy - 7xy - 56y^2 - x^2 - xy = -56y^2.$$

Так как $y = abc$, то $-56y^2 = -56a^2b^2c^2$. Тождество доказано.

Упражнения

427. Определите степень, старший коэффициент и свободный член многочлена, тождественно равного произведению:

а) $(-2x^3 - 3x^2 + x - 1)(3x^2 - x - 2)$;

б) $(x^5 - 5)(-2x^6 - x^3 + 3)$;

в) $(2x^n - 3x^{n-1} + ... + 2x + 3)(-x^n + x^{n-1} - x^{n-2} + ... + x + 1)$.

428. Выполните умножение:

а) $(x + 4)(x + 2)$;

б) $(a - 1)(a + 3)$;

в) $(-3 - x)(x + 1)$;

г) $(2y - 2)(4 - y)$;

д) $(2a + 1)(3a - 2)$;

е) $(5a - b)(4a + b)$.

429. Представьте в виде многочлена:

а) $-(a + 4)(a - 2)$; в) $-(3a + b)(a - b)$;
б) $-(2x + 8)(x + 1)$; г) $-(x - 2y)(x - 3y)$.

430. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x^3 + y)(x^2 - y^2)$;
б) $(a^3 - 2b)(a - 4b^2)$;
в) $(3a^2 - 1)(6a^2 + 2)$;
г) $(x^2 - 3y)(x + 2y^2)$;
д) $-(a - 4b)(a^3 - b^3)$;
е) $-(3a^2 - 2b^2)(2b^2 + 3a^2)$.

431. Выполните умножение:

а) $(x^n + 3)(x^n - 3)$; в) $(a^{n-1} + a^n)(a - 1)$, где $n > 1$;
б) $(a^n + b^n)(a^n - b^n)$; г) $(x^{n-2} - x^n)(x^2 + 1)$, где $n > 2$.

432. Выполните умножение многочленов в столбик:

а) $(x^2 + x + 2)(x - 5)$;
б) $(a^2 - a + 1)(a - 2)$;
в) $(b - 4)(b^2 - b + 1)$;
г) $(2p - 1)(p^2 - 2p + 1)$;
д) $(x^2 + 2xy - y^2)(x + y)$;
е) $(2a - b)(a^2 - 3ab - b^2)$.

433. Выполните умножение и найдите сумму коэффициентов многочлена, тождественно равного произведению:

а) $(a^2 - a + 1)(a + 1)$; в) $(a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1)$;
б) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$; г) $(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)(x + 1)$.

434. Преобразуйте в многочлен:

а) $(a^2 - a + 2)(a^2 + 2a - 1)$; б) $(3 - x + x^2)(x^2 - 3x + 2)$.

435. Представьте в виде многочлена:

а) $-(x + 2)(3x^2 - x + 1)$;
б) $-(6a^2 - a + 2)(a - 2)$;
в) $2a(a - 2)(a^2 - 3a + 1)$;
г) $-b(b + 4)(b^2 - 4b + 16)$.

436. Преобразуйте в многочлен:

а) $(a + 1)(a - 2)(a + 3)$; б) $(x - 2)(x - 3)(x + 4)$.

437. Замените степень произведением и преобразуйте это произведение в многочлен:

а) $(b + 4)^2$; б) $(a + 3)^3$; в) $(x - 1)^4$.

438. Упростите выражение:

а) $(2a - 4)(3a + 1) - 6a^2$;

б) $(6x + 5)(6x + 8) - 78x$;

в) $12a^2 - (3a + 1)(4a - 2)$;

г) $17ab - (a + 2b)(b + 8a)$;

д) $(x - 3y)(x + y) + 3y^2$;

е) $6b^3 - (3b^2 + 1)(2b - 1)$.

439. Преобразуйте в многочлен:

а) $(5x - 1)(2x + 2) - 10(x^2 - 4)$;

б) $12a(a - 2) - (3a + 1)(4a - 1)$;

в) $6a(a + 6) - (2a + 3)(a + 1)$;

г) $-7(2y - 1) + (3y + 2)(y + 4)$.

440. Найдите, при каких значениях переменной x значение выражения:

а) $(4x - 1)(2 - 3x) - 2x(5 - 6x)$ равно 2;

б) $5x(3x + 4) - (5x + 2)(3x - 4)$ равно 2;

в) $(3 - x)(2 - 3x) - (x + 2)(3x - 4)$ равно 1;

г) $(5x + 1)(2x - 3) - (3x + 1)(3x - 2) - x(x + 1)$ равно 0.

441. Упростите выражение:

а) $2{,}4(x^2 - 1) - (0{,}6x - 1)(4x + 1)$;

б) $0{,}12a(a - 2) - (0{,}3a + 1)(0{,}4a - 1)$;

в) $\frac{1}{6}a(a + 6) - \left(\frac{1}{3}a + 3\right)\left(\frac{1}{2}a - 1\right)$;

г) $-\frac{1}{3}(9y^2 - 1) + (3y + 6)(y - 1)$.

442. Упростите выражение:

а) $24(x^2 - 1) - (6x - 1)(4x + 1)$;

б) $(6a + 2)(2b - 1) - 2(1 + 6ab)$;

в) $-3(a - 6) + (3a - 1)(a + 4)$;

г) $(4a - 1)(6b + 1) - 3a(8b + 2)$.

443. Найдите значение выражения:

а) $12x^2 - (3x + 4)(4x - 1)$ при $x = 0{,}02$;

б) $-14a + (4a - 1)(3 - 2a)$ при $a = \frac{1}{4}$.

444. Преобразуйте в многочлен:

а) $(3^{2n} + 3^n - 1)(3^n - 1) + 2(3^n - 1)$;

б) $(5^n + 1)(5^{2n} - 5^n + 1) - 5^{3n}$;

в) $(7^n - 1)(7^{4n} + 7^{3n} + 7^{2n} + 7^n + 1) + 1$;

г) $(2^{3n} + 4^n + 2^n + 1)(2^n - 1) + 1$.

445. Докажите, что значение выражения не зависит от a:

а) $(a-6)(a+9)-(a-4)(a+7)$;

б) $a^4-(a^2+8)(a^2-8)$.

446. Даны выражения:

а) $(a+2)(a+18)+(a-12)(a-8)$;

б) $(a-2)(a-4)+a(a+6)$;

в) $(a-5)(a+6)-(a-10)(a+11)$;

г) $(a^2+5)(a^2-4)+2a(a^4+1)$.

Выберите те из них, которые при любых значениях a принимают положительные значения.

447. Докажите, что при любом $n \in N$ значение выражения:

а) $(n-1)(n+12)-(n-3)(n+4)$ кратно 10;

б) $(n+5)(n-6)-(n-2)(n+15)$ кратно 14.

448. Докажите, что для любых целых m и n значение выражения делится на 8:

а) $(m+2n-1)(m+2n+9)-(m-2n+1)(m-2n-9)$;

б) $(2m+n-3)(2m+n+1)-(2m-n+3)(2m-n-1)$.

449. Замените m, если возможно, каким-либо целым числом так, чтобы значение выражения

$$(3a-1)(5a-3)-4(3a+1)(a-1)+m:$$

а) делилось на 3 при любом целом a;

б) не делилось на 3 ни при каком целом a;

в) делилось на 3 только при некоторых целых a.

450. Одно из двух натуральных чисел при делении на 7 даёт остаток 2, а другое — остаток 5. Какой остаток получится при делении на 7 удвоенного произведения этих чисел?

451. Одно из двух натуральных чисел при делении на 5 даёт остаток 4, а другое — остаток 3. Какой остаток получится при делении на 5 произведения суммы и разности этих чисел?

452. Упростите выражение, используя введение новых переменных:

а) $(a^2+b^2-5ab)(a^2+b^2-ab)-(a^2+b^2)(a^2+b^2-6ab)$;

б) $(x^2+y^2+p^2-4pxy)(x^2+y^2+p^2+3pxy)-$
$-(x^2+y^2+p^2)(x^2+y^2+p^2-pxy)$.

453. Докажите тождество:

а) $(x^4+y^4)(x^4+y^4-2xy)-(x^4+y^4-6xy)(x^4+y^4+4xy)=24x^2y^2$;

б) $(a^3+ab+1)(3a^3+2ab)-(3a^3-ab+1)(a^3+2ab)=2a^3+4a^2b^2$.

Упражнения для повторения

454. Вычислите:

а) $\left(4{,}16 \cdot \frac{1}{4} - 5{,}04\right) \cdot 20{,}5$;

б) $-\left(3{,}18 \cdot \frac{1}{3} - 4{,}16\right) + 10{,}3$.

455. Книга сначала подорожала на 15%, а затем подешевела на 15%. Как изменилась цена книги по сравнению с первоначальной ценой? Из данных ответов выберите тот, который вам кажется верным: уменьшилась; увеличилась; не изменилась. Проверьте ваш ответ с помощью вычислений.

456. Пользуясь таблицей квадратов двузначных чисел, вычислите значение выражения:

а) $3 \cdot 7^4$; б) $-2 \cdot 9^4$; в) $8^4 - 1076$; г) $6^4 - 23^2$.

457. Представьте выражение в виде куба одночлена:

а) $64a^6b^9$; б) $-0{,}008a^{12}b^3$; в) $\frac{1}{8}a^{3n}b^{15}$; г) $-a^{3n}b^{6n}$.

458. Представьте каждый из одночленов $4x^3y^6$, $12xy^2$, $-6x^2y$, $-2xy$ в виде произведения одночленов, один из которых равен $2xy$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правило раскрытия скобок:
а) перед которыми стоит знак «плюс»;
б) перед которыми стоит знак «минус».
Упростите выражение $(2a + b) + (a - b) - (3a - b)$.

2. Сформулируйте правила заключения в скобки.
В многочлене $a^4 + 3a^2 - 2a + 3$ заключите два последних члена в скобки так, чтобы перед скобками стоял:
а) знак «плюс»; б) знак «минус».

3. Сформулируйте правило умножения одночлена на многочлен.
Умножьте одночлен $2a^2b$ на многочлен $a^2 - ab + b$.

4. Сформулируйте правило умножения многочленов.
Выполните умножение многочлена $2x^2 + 3x - 1$ на двучлен $4x - 3$. Чему равны степень, старший коэффициент и свободный член произведения этих многочленов?

Дополнительные упражнения к главе 3

К параграфу 5

459. Найдите значение многочлена $\frac{1}{3}a^3 - 6ab + 9b^2$ при:

а) $a = -3$, $b = \frac{1}{3}$;

б) $a = 0{,}9$, $b = -0{,}1$.

460. Вычислите значение многочлена:

а) $13x^4 - 27x^2 + 26$ при $x = 3$;

б) $3x^3 - 2x^2 + 6 - 12$ при $x = -3$.

461. Сумму S_n последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно можно вычислить по формуле $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$. Используя эту формулу, найдите сумму всех натуральных чисел:

а) от 1 до 50 включительно;

б) от 51 до 150 включительно;

в) от 201 до 400 включительно.

462. Расположите одночлены, входящие в состав многочлена

$$5a^5x^4 - 2a^2x^3 - 6ax^2 - 4 - a^6x:$$

а) по убывающим степеням переменной a;

б) по возрастающим степеням переменной x.

463. Даны многочлены:

а) $x^4 + 3y^4 + x^2y^2 + 8$;

б) $3a^4 + 4$;

в) $x^8 + x^6 + x^4 + x^2$;

г) $a^6 + b^6 + 18$;

д) $x^2y^2 + xy + 1$;

е) $a^4 + 4b^2$.

Выберите из них те, которые принимают положительные значения при всех значениях переменных.

464. Приведите многочлен к стандартному виду и найдите его значение при $a = -2$, $b = 11$:

а) $\frac{1}{3}aab + a^3b + \frac{2}{3}a^2b - \frac{1}{2}a^3b - a^2b$;

б) $\frac{1}{4}a^4b^4 - 0{,}3ab - \frac{3}{4}aa^3b^4 + \frac{1}{2}a^4b^4 + 2{,}3ab$.

465. В многочлене $5x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 1$ замените x на:

а) $3x$; б) $-x$; в) a; г) $-2a$.

Приведите полученный многочлен к стандартному виду.

466. Приведите к стандартному виду многочлен:

а) $5a^n - 0{,}2a^n - \frac{1}{3}a^{n+1} - a^n - \frac{1}{6}a^{n+1}$;

б) $-\frac{1}{7}x^{n+2} - \frac{1}{3}x^n + \frac{1}{14}x^{n+2} - \frac{1}{9}x^n + x^n$.

467. Даны многочлены:

а) $12x^2y - xy - 8x^2y - x^2y + xy - y$;

б) $6x^2y - 4y - x^3y - 3x^2y + x^3y + 3y$;

в) $3x^4y - 3x^2y - x^4y + y - 2y - 2x^4y$;

г) $x^2y + 5x^2y - xy^2 + 4xy^2 - y - 3x^2y - 3xy^2$.

Выберите из них те, которые тождественно равны двучлену $3x^2y - y$.

468. Даны выражения:

а) $5a^3b^2 \cdot \frac{1}{5}a^2b^3 + 2$;

б) $2 + (-2ab)^3 \cdot \left(-\frac{1}{8}ab\right)$;

в) $(3a^2b^2)^2 \cdot \frac{1}{9}ab + 2$;

г) $2 + (-2ab)^2 \cdot (-ab)^3$.

Какие из них тождественно равны двучлену $a^5b^5 + 2$?

469. Какова степень многочлена:

а) $x^2 - 3x^5y^3 + y^6 + 3x^5y^3 - 4x^2$;

б) $a^6b - 2b^6 - 1{,}5a^6b + 0{,}5a^6b - a^6$;

в) $7x^2y^3 - 2x^3y^2 - x^5y^6 + x^5y^6 - 3xy$;

г) $12bc^2 - 2b^2c^3 + c^4 - b^4 + 2b^3c^3$?

470. Замените знак * каким-либо одночленом так, чтобы получился многочлен четвёртой степени:

а) $* + 4x^4 + 3x^3 - x^2 - 106$;

б) $5x^5 - * + 12x^4 - x^3 + x$;

в) $x + * + x^4 - x^5 - 3x^2 - 1$;

г) $13x^2 + * - 2x^5 - x^4 + 4x + 21$.

471. В многочлене $x^my^n - xy^3 + x^2y^3 - xy + 1$ замените показатели m и n натуральными числами так, чтобы получился многочлен:

а) шестой степени;

б) пятой степени;

в) седьмой степени.

472. Подберите, если возможно, какие-либо значения m и n, при которых степень многочлена $3a^mb^n - a^4b + 2a^3b - ab + 1$ равна:

а) 6; в) 7;

б) 5; г) 8.

К параграфу 6

473. Найдите сумму и разность многочленов:

а) $5x^5 - x^4 + 3x^2 + x$ и $x^4 + 3x^2 - 2x + 1$;

б) $12a^2 - 6b - 7c + d$ и $3a^2 + 2b + 4c - d$.

474. Выражение $M = A - (B + C)$ представьте в виде многочлена, если:

$$A = -0{,}5x^2y^3 + 1{,}5x^3y^2 - 28, \qquad B = 0{,}4x^2y^3 - 0{,}3x^3y^2 - 24,$$
$$C = 3{,}1x^2y^3 - 2{,}2x^3y^2 - 35.$$

475. Выражение $P = (A - B) + (C - D)$ представьте в виде многочлена, если:

$A = 3{,}5a^2 - 2{,}4b^2 + 1$, $\quad C = a^2 - 0{,}4b^2 - 4{,}8$,

$B = -0{,}6a^2 + 2{,}3b^2 - 2{,}6$, $\quad D = 3a^2 + 0{,}6b^2 + 8{,}2$.

476. Замените M многочленом так, чтобы полученное равенство было тождеством:

а) $M + (2x^2 + x) = 3x^2 - x + 1$;

б) $(3a^4 - a) + M = 5a^4 - 6a$;

в) $M - (x^3 + x^2) = 3x^2 + 1$;

г) $M - (3a^4 - a) = 5a^4 + 6a + 1$;

д) $(a^6 + a) - M = 2a^6 - a + 9$;

е) $(2x^4 - 3x^3) - M = x^4 + x^3$.

477. Какой многочлен надо прибавить к многочлену $3x^3 + 2x^2 - x + 6$, чтобы получить:

а) $3x^3$; б) x^2; в) $x + 6$; г) $3x^3 + 2x^2$?

478. Какой многочлен надо вычесть из многочлена $5x^3 - 6x^2 + x - 1$, чтобы получить:

а) $5x^3$; б) $5x^3 + x$; в) $3x$; г) 6?

479. Представьте многочлен в виде суммы или разности двучленов с положительными коэффициентами:

а) $6x^3 - 6x^2 - x + 1$; в) $-x^5 + x^4 - x^3 + x^2$;

б) $x^4 + x^3 + 3x^2 + 8$; г) $3x^8 - x^6 + x^4 - 5x^2$.

480. Представьте трёхчлен в виде суммы двучленов, каждый из которых содержит член вида ax, где a — некоторое число:

а) $x^2 + 8x + 1$; в) $x^2 + 5x - 11$;

б) $x^2 - 6x - 8$; г) $x^2 + x - 31$.

481. Если из двузначного числа вычесть двузначное число, записанное теми же цифрами, взятыми в обратном порядке, то разность будет равна 72. Найдите это двузначное число.

482. Представьте числа в виде многочленов и упростите полученное выражение:

а) $\overline{a0b} + \overline{b0a}$; б) $\overline{5xy}_{(7)} - \overline{xy}_{(7)}$; в) $\overline{8ab} - \overline{ab8}$; г) $\overline{ab0c}_{(5)} - \overline{cb0a}_{(5)}$.

483. Преобразуйте в многочлен:

а) $a^n b^n(a^8b^4 - a^9b - 3)$; в) $(3b^6 + 15b^5c + c^4) \cdot (-0{,}1b^nc)$;

б) $-2x^ny(-x^6y^6 + xy^5 - xy)$; г) $\left(y^7 - \frac{1}{3}xy^6 + \frac{2}{3}xy^4 + x\right) \cdot (-15x^ny^2)$.

484. В январе бригада изготовляла ежедневно a изделий, в феврале — на 20% больше, чем в январе, и на b изделий меньше, чем в марте. Сколько изделий изготовила бригада за первый квартал, если в январе было 19 рабочих дней, в феврале — 20 рабочих дней, а в марте — 25?

485. Магазин в первый месяц продал 35 курток, а во второй — на 15 курток больше. Найдите выручку магазина за два месяца, если известно, что в первый месяц куртки продавали по цене a р., а во второй месяц цена возросла на 10%.

486. Замените выражение тождественно равным многочленом:

а) $18 - 7(2 - m) + 3(1 - 2m)$;

б) $5p(p + 1) - p^2(5 + p) + p^3$;

в) $-0{,}6x(x + 0{,}3) - (0{,}4x + 1) \cdot (-x)$;

г) $7(b^2 + 3b - 1) + (b + 4) \cdot (-7b)$.

487. Упростите выражение:

а) $(2x^2)^2 - x^3(1 - x)$; в) $(0{,}2x^3)^2 - 0{,}1x^2(0{,}3x^4 - 1)$;

б) $\left(-\frac{1}{3}b^2\right)^3 + b\left(\frac{1}{27}b^5 - 1\right)$; г) $\left(-\frac{1}{8}a^2\right)^2 - \frac{1}{128}a\left(a^3 + 256\right)$.

488. Упростите выражение:

а) $-x - (1 - (1 - (1 - \ldots (1 - x)\ldots)))$, где единица написана 10 раз;

б) $-x - (1 - (1 - (1 - \ldots (1 - x)\ldots)))$, где единица написана 101 раз.

489. Объясните суть числового фокуса: если двузначное число умножить на себя, вычесть из него 81, полученный результат разделить на задуманное число, увеличенное на 9, а к частному прибавить 9, то получится задуманное число.

490. Докажите, что при любых a и b значение выражения

$$3a^2 + a(a - 4b) - 2a(6 - 2b) + 12a + 1$$

является положительным числом.

491. Представьте в виде многочлена:

а) $(a + 3)(a + 4)(a + 5)$; в) $(y + 2)(y - 2)(y + 4)$;

б) $(x - 1)(x - 8)(x + 6)$; г) $(p - 5)(p + 1)(p + 2)$.

492. Пусть m — сумма коэффициентов при чётных степенях, n — сумма коэффициентов при нечётных степенях многочлена, тождественно равного произведению

$$(x^2 - 2x - 3)(-2x^2 + 3x - 1).$$

Найдите $\frac{m+n}{2}$ и $\frac{m-n}{2}$.

493. Замените степень произведением и преобразуйте его в многочлен стандартного вида:

а) $(x + 1)^2$; б) $(a - 6)^2$; в) $(x + y)^3$; г) $(a - 5)^4$.

494. Докажите, что каждое из выражений

$$(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) \text{ и } (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

тождественно равно $a^4 - b^4$.

495. Докажите, что при любом значении b выражение:

а) $(b - 4)(2b + 1) + 7(b + 1)$ принимает положительное значение;

б) $5b(2 - b) - (b + 1)(b + 9)$ принимает отрицательное значение.

496. Докажите, что значение выражения

$$(7{,}5a - 2b)(2a + 4b) - 15a(a + 2b) + 4ab$$

не зависит от a.

497. Найдите значение выражения

$$(9a^2 - 15a + 25)(3a + 5) - 9a^2(3a - 1)$$

при $a = -\frac{2}{3}$; 0; $1\frac{1}{3}$.

498. Упростите выражение:

а) $(a + 2)(a + 2)(a + 4) - a(a^2 + 20)$;

б) $(x + 3)(x + 4)(x - 4) - x(x^2 + x - 16)$;

в) $x^2(2 - x) + (x + 1)(x + 1)(x - 4)$;

г) $a(a^2 - 7) - (a + 1)(a + 2)(a - 3)$.

499. Зависит ли от a значение выражения:

а) $(a^2 - 5a + 4)(2a + 3) - (2a^2 - a - 10)(a - 3)$;

б) $(a - 1)(a^2 + a + 1) - (a + 1)(a^2 - a + 1)$;

в) $(a + 1)(a - 1)(a - 2) - a(a^2 - 2a - 1)$;

г) $(a + 2)(a - 2)(a + 1) - (a^2 + 1)(a - 4)$?

500. Докажите, что данные выражения являются тождественно равными:

а) $(x + a)(x - b)(x - c)$ и $x^3 + (a - b - c)x^2 + (-ab - ac + bc)x + abc$;

б) $(a + b + x)(a - b - x)$ и $(a - b)(a + b) - x(2b + x)$;

в) $(a + x + y)(a + x - y) + y^2$ и $(a + x)^2$.

Глава 4 Уравнения

В этой главе рассматривается традиционный для курса алгебры материал: уравнение и его корни, преобразования, приводящие к уравнению, равносильному данному, линейные уравнения и задачи, решаемые с помощью линейных уравнений.

§ 7. Уравнение с одной переменной

16. Уравнение и его корни

Рассмотрим старинную задачу.

Летела стая гусей, а навстречу им летит гусь. «Здравствуйте, сто гусей!» — говорит гусь. «Нас не сто, — отвечают ему гуси. — Если бы нас было столько, сколько теперь, да ещё столько, да полстолька, да четверть столька, да ещё и ты, гусь, то тогда нас было бы сто». Сколько гусей в стае?

Обозначим буквой x число гусей в стае. По условию задачи

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100.$$

Чтобы найти неизвестное число гусей, мы составили равенство, содержащее переменную. Такие равенства называют *уравнениями с одной переменной* или *уравнениями с одним неизвестным*. Впервые уравнения в явном виде появились в труде «Арифметика» древнегреческого математика Диофанта.

Нам надо найти значение x, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство. Такое число называют *корнем уравнения*.

Определение. Корнем уравнения (решением уравнения) называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение — значит найти множество его корней. Иначе говоря, решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что их нет. Множество корней уравнения может состоять из одного, двух, трёх и более элементов, оно может быть пустым множеством или бесконечным множеством.

Приведём примеры.

1. Уравнение

$$x + 1 = 6$$

имеет один корень — число 5.

2. Уравнение

$$(x - 1)(x - 5)(x - 8) = 0$$

имеет три корня: 1, 5 и 8. Каждое из этих значений x обращает произведение $(x - 1)(x - 5)(x - 8)$ в нуль, а при любых других значениях x ни один из множителей не равен нулю, а значит, не равно нулю их произведение.

3. Уравнение

$$x = x + 4$$

не имеет корней, так как значение его левой части меньше значения правой части при любом значении x.

4. Уравнение

$$3(x + 5) = 3x + 15$$

имеет бесконечно много корней, так как в силу распределительного свойства умножения значение его левой части равно значению правой части при любом значении x.

В уравнении $17 - 3x = 2x - 2$ обе его части имеют смысл при любом значении x, а в уравнении $\frac{15 - x}{x - 2} = x + 9$ обе его части имеют смысл только тогда, когда $x \neq 2$. Говорят, что областью определения первого уравнения (или областью допустимых значений переменной в первом уравнении) является множество всех чисел, а областью определения второго уравнения — множество всех чисел, кроме 2.

Определение. **Областью определения уравнения (областью допустимых значений переменной в уравнении) называется множество значений переменной, при которых обе части уравнения имеют смысл.**

Введём теперь понятие равносильности уравнений.

Уравнения $x^2 = 36$ и $(x + 6)(x - 6) = 0$ имеют одни и те же корни: -6 и 6. Такие уравнения называют *равносильными*.

Определение. **Уравнения называются равносильными, если множества их корней совпадают.**

Иначе говоря, уравнения равносильны, если они имеют одни и те же корни или не имеют корней.

В процессе решения уравнений стремятся данное уравнение заменить более простым уравнением, равносильным ему. При этом используются следующие свойства:

из данного уравнения получается равносильное ему уравнение, если:
1) перенести слагаемое из одной части уравнения в другую, изменив его знак;
2) обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число;
3) в какой-либо части или в обеих частях уравнения выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения уравнения.

Первые два свойства можно доказать, используя свойства верных числовых равенств: если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число, то получится верное равенство; если обе части верного равенства умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится верное равенство.

Третье свойство вытекает из того, что в результате тождественного преобразования получается выражение, значение которого совпадает со значением исходного выражения при любых допустимых значениях переменной.

Заметим, что требование сохранения области определения уравнения является существенным. Так, если в уравнении

$$x + 2 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-2} = 2x$$

заменить нулём разность $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-2}$, то получится уравнение

$$x + 2 = 2x,$$

не равносильное данному. Действительно, число 2 является корнем второго уравнения, но не является корнем первого, так как при $x = 2$ левая часть первого уравнения не имеет смысла.

Вернёмся к задаче о стае гусей, рассмотренной в начале пункта.
Решим уравнение, составленное по условию задачи:

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100.$$

Перенесём слагаемое 1 в правую часть, изменив его знак на противоположный, и приведём подобные слагаемые:

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 100 - 1,$$

$$2\frac{3}{4}x = 99.$$

Разделим обе части уравнения на $2\frac{3}{4}$ и получим $x = 36$.

Заменяя последовательно одно уравнение другим, ему равносильным, мы нашли, что число 36 является корнем уравнения, составленного по условию задачи.

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи — в стае было 36 гусей.

Упражнения

501. Является ли число 7 корнем уравнения:

а) $x^4 - 5x^3 + 17x^2 + x = 15$;

б) $(17x - 119)(x^4 + 11) = 0$?

502. Из множества $X = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ выделите подмножество чисел, являющихся корнями уравнения $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

503. Из данных уравнений выберите те, для которых число -12 является корнем:

а) $6x + 72 = 0$;

б) $(x - 4)(x + 12) = 0$;

в) $3x^2 + x = 132$;

г) $2x^2 - x = 276$;

д) $(x - 12)x = 0$;

е) $|x| + x = 0$.

504. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x + 8 = 11$;

б) $(x - 6)(x + 4) = 0$;

в) $5(x + 9) = 5x + 45$;

г) $3x - 21 = 16 + 3x$;

д) $x^4 + x^2 + 1 = 0$;

е) $x^2 + (x - 5)^2 = 0$?

505. Приведите пример уравнения, множество корней которого:

а) состоит из одного числа;

б) является бесконечным;

в) является пустым.

506. Найдите множество корней уравнения:

а) $(-x)^4 = x^4$; б) $x^7 = (-x)^7$; в) $(-x)^2 \cdot (-x)^4 = x \cdot x^5$.

507. Имеет ли уравнение:

а) $5x^5 + 3x^4 + x^3 + 1 = 0$ положительные корни;

б) $2x^5 - x^4 + 6x - 1 = 0$ отрицательные корни?

508. Укажите область определения уравнения:

а) $5(x - 1{,}8) = 3x + 6$;

б) $x + 1 + \frac{1}{4x} = 0$;

в) $\frac{x^2 + 18}{x - 1} - 4 = 5$;

г) $\frac{6}{x^2 + 1} - 5 = 0$;

д) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{3}{x + 1} = 2x^2 - \frac{2}{3x}$;

е) $3x^2 - \frac{2x}{|x| - 1} = 3 - \frac{2x}{|x| - 1}$;

ж) $3x^2 - \frac{2x}{|x| + 1} = 3 - \frac{2x}{|x| + 1}$.

509. Решите уравнение:

а) $|x| = 18$; д) $|x| = -x$;

б) $|x| = 0$; е) $|x^5| = -x^5$;

в) $|x| = -15$; ж) $|-x|^4 = x^4$;

г) $|x| = x$; з) $|-x|^7 = x^7$.

510. Какие свойства уравнений позволяют утверждать, что равносильны уравнения:

а) $6x - 1 = 11$ и $6x = 11 + 1$;

б) $15(2 - x) = 30$ и $2 - x = 2$?

511. Проверьте, равносильны ли уравнения $2x - 3 = 1 - x$ и:

а) $3 - 2x = x - 1$; в) $\frac{2x-3}{3} = \frac{1-x}{3}$;

б) $3(2x - 3) = 3(1 - x)$; г) $2x - x = 1 - 3$.

Объясните, на основании каких свойств можно сделать выводы о равносильности или неравносильности уравнений.

512. Равносильны ли уравнения:

а) $12x - 2 = 7x + 1$ и $12x - 7x = 1 + 2$;

б) $15(6 - 0{,}2x) = -(2 - x)$ и $90 - 3x = -2 - x$;

в) $0{,}01x - 0{,}2 = 0$ и $x - 20 = 0$;

г) $3x - \frac{2}{x} + \frac{2}{x} = x + 2$ и $3x = x + 2$?

513. При каких значениях m равносильны уравнения:

а) $7x + 2 = 16$ и $7x + 2 + m = 16 + m$;

б) $7x + 2 = 16$ и $(7x + 2)m = 16m$?

514. Решите уравнение $kxy - 1 = -p$, где $k \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, относительно переменной:

а) x; б) y.

Упражнения для повторения

515. Упростите выражение:

а) $2{,}7(a - 18) - 0{,}8(2a + 50) - 1{,}7$;

б) $(b - 1)(6b + 4) - (2b + 3)(3b - 2) + (6{,}4b - 2)$.

516. Сравните значения выражений:

а) $6 \cdot (-2)^{11}$ и $-6 \cdot 2^{11}$;

б) $7 \cdot (-3)^{10}$ и $-7 \cdot 3^{10}$;

в) $(1{,}7 - 0{,}8)^6$ и $(0{,}8 - 1{,}7)^6$;

г) $(0{,}9 - 0{,}2)^5$ и $(0{,}2 - 0{,}9)^5$.

17. Линейное уравнение с одной переменной

В Государственном московском музее изобразительных искусств имени А. С. Пушкина хранится древнеегипетский папирус, созданный около 2000 г. до н. э. Он получил название Московского математического папируса. Одна из его задач сводится к уравнению $x - \frac{1}{5}x = 20$, равносильному уравнению $\frac{4}{5}x = 20$. Такие уравнения решали в Вавилоне, Древней Индии и Древнем Китае за две тысячи лет до нашей эры.

Уравнение $\frac{4}{5}x = 20$ имеет вид $ax = b$. Уравнения такого вида называют *линейными уравнениями с одной переменной*.

Определение. Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной.

Примерами линейных уравнений могут служить уравнения

$$0{,}5x = 2; \quad 7x = 0; \quad -x = 4.$$

В первом из них $a = 0{,}5$, $b = 2$, во втором $a = 7$, $b = 0$, в третьем $a = -1$, $b = 4$.

В уравнении $ax = b$ число a называют коэффициентом, а число b — свободным членом.

Выясним, сколько корней может иметь уравнение $ax = b$. Рассмотрим случаи, когда $a \neq 0$ и b — любое число; когда $a = 0$ и $b \neq 0$; когда $a = 0$ и $b = 0$.

Если $a \neq 0$, то, разделив на a обе части уравнения $ax = b$, найдём, что $x = \frac{b}{a}$, т. е. в этом случае уравнение имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ не имеет корней, так как при этих условиях равенство $0x = b$ ни при каком х не является верным.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то любое число является корнем уравнения, так как равенство $0x = 0$ верно при любом x.

Итак, множество корней линейного уравнения
может состоять изодного элемента,
быть пустым множеством,
быть бесконечным множеством.

Упражнения

517. Даны уравнения:

а) $12x = 0$; г) $0x = 0$;

б) $0x = 12$; д) $\frac{1}{7}x = 0$;

в) $-x = \frac{1}{3}$; е) $0x = \frac{1}{7}$.

Какие из них имеют единственный корень; не имеют корней; имеют бесконечно много корней?

518. Найдите корень уравнения:

а) $9x = -108$; г) $13x = 2$; ж) $18x = 0$;
б) $-x = 1$; д) $-7x = -3$; з) $-11x = 17$;
в) $-100x = 7$; е) $-x = -11$; и) $-x = 0$.

519. Решите уравнение:

а) $0{,}6x = -1{,}5$; г) $7x = \frac{1}{7}$; ж) $\frac{1}{6}x = 0{,}1$;

б) $-0{,}05x = 1$; д) $-\frac{1}{7}x = 3$; з) $0{,}7x = \frac{2}{3}$;

в) $0{,}81x = 0$; е) $0{,}2x = \frac{5}{7}$; и) $-\frac{7}{8}x = 0{,}3$.

520. При каких значениях x значение выражения $7x$ равно:

а) 343; б) -1; в) $\frac{1}{7}$; г) 0; д) 0,1?

521. Составьте какое-либо линейное уравнение, которое:
а) имеет единственный корень, равный -3;
б) не имеет корней;
в) имеет бесконечно много корней.

522. Решите уравнение:

а) $|7x| = 14$; в) $|0{,}5x| = 0$;
б) $|-0{,}8x| = 1$; г) $|-2{,}5x| = -5$.

523. В уравнении $ax = 15$ найдите коэффициент a, зная, что корень уравнения равен:

а) -3; б) $\frac{1}{3}$; в) $-\frac{1}{15}$; г) 0,02.

524. Найдите все целые значения коэффициента a, при которых корнем уравнения $ax = -8$ является целое число.

525. При каких значениях k уравнение $kx = k^2 - 4k$ имеет единственный корень; не имеет корней; имеет бесконечно много корней?

526. При каких значениях m уравнение $mx = m^2 - 5m + 6$ имеет единственный корень; не имеет корней; имеет бесконечно много корней?

527. Не решая уравнение, составьте другое уравнение с целыми коэффициентами, равносильное данному:

а) $-3{,}17x = 2{,}1$; б) $\frac{5}{6}x = -2{,}5$; в) $-1\frac{1}{3}x = -2$.

528. При каких значениях m равносильны уравнения:

а) $7x + 2 = 16$ и $7x + 2 + m = 16 + m$;

б) $7x + 2 = 16$ и $(7x + 2)m = 16m$?

529. Зная, что переменные принимают положительные значения, выразите из формулы:

а) $s = ab$ переменную a через s и b;

б) $s = vt$ переменную v через s и t;

в) $p = mn$ каждую из переменных m и n через две другие.

530. Решите уравнение $xy = 2k$, где $k \neq 0$, относительно переменной:

а) x; б) y.

Упражнения для повторения

531. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $5x(x + 3) - (5x + 1)(x + 2)$ при $x = 1{,}3$;

б) $(6a - b)(a - 2b) - (2a + b)(3a + 2b)$ при $a = -1{,}5$, $b = 2$.

532. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3^{13} \cdot 9^2}{27^5}$; б) $\frac{15^3}{9^2 \cdot 25}$.

533. Задайте с помощью перечисления элементов множество трёхзначных чисел, у которых цифра десятков в 4 раза больше цифры сотен и на 2 больше цифры единиц.

? Контрольные вопросы и задания

1. Что называется корнем уравнения?
Является ли число 2 корнем уравнения $x^3 - x = 6$?
2. Что значит решить уравнение?
3. Какие уравнения называются равносильными? Сформулируйте свойства перехода от данного уравнения к равносильному уравнению. Приведите пример двух равносильных уравнений.
4. Какое уравнение называется линейным уравнением с одной переменной?
5. Сколько корней может иметь линейное уравнение с одной переменной? Приведите примеры.

§ 8. Решение уравнений и задач

18. Решение уравнений, сводящихся к линейным

Выполняя тождественные преобразования выражений и используя свойства уравнений, мы можем иногда решение заданного уравнения с одной переменной свести к решению равносильного ему линейного уравнения.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$(2x + 1)(3x - 2) - 6x(x + 4) = 67 - 2x.$$

Умножим в левой части уравнения многочлен на многочлен и одночлен на многочлен, а затем раскроем скобки:

$$(6x^2 + 3x - 4x - 2) - (6x^2 + 24x) = 67 - 2x,$$
$$6x^2 + 3x - 4x - 2 - 6x^2 - 24x = 67 - 2x.$$

Перенесём слагаемые, содержащие x, в левую часть и свободные члены — в правую, изменяя при этом их знаки:

$$6x^2 + 3x - 4x - 6x^2 - 24x + 2x = 67 + 2.$$

Приведём подобные слагаемые:

$$-23x = 69.$$

Разделим обе части уравнения на -23:

$$x = -3.$$

Мы последовательно заменяли одно уравнение другим, ему равносильным. Значит, заданное нам уравнение равносильно уравнению $-23x = 69$ и имеет единственный корень — число -3.

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{x+2}{3} - \frac{3x-1}{4} = -2.$$

В левой части этого уравнения содержатся дроби $\frac{x+2}{3}$ и $\frac{3x-1}{4}$.

Умножив обе части уравнения на наименьший общий знаменатель дробей, т. е. на 12, получим

$$\left(\frac{x+2}{3} - \frac{3x-1}{4}\right) \cdot 12 = -2 \cdot 12.$$

Раскроем скобки:

$$\frac{x+2}{3} \cdot 12 - \frac{3x-1}{4} \cdot 12 = -24.$$

Умножим каждую дробь на 12 и выполним сокращение дробей:

$$\frac{(x+2)\cdot 12}{3} - \frac{(3x-1)\cdot 12}{4} = -24, \qquad (x + 2) \cdot 4 - (3x - 1) \cdot 3 = -24.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} 4x + 8 - 9x + 3 &= -24, \\ 4x - 9x &= -24 - 8 - 3, \\ -5x &= -35, \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Заменяя шаг за шагом одно уравнение другим, ему равносильным, мы получили линейное уравнение $-5x = -35$, равносильное данному. Значит, данное линейное уравнение имеет единственный корень — число 7.

В рассмотренных примерах решение исходного уравнения сводилось к решению равносильного ему линейного уравнения вида $ax = b$, в котором коэффициент a не равен нулю. Однако может случиться так, что, заменяя последовательно одно уравнение другим, ему равносильным, мы в результате получим линейное уравнение либо вида $0 \cdot x = b$, где $b \neq 0$, либо вида $0 \cdot x = 0$. В первом случае можно сделать вывод, что исходное уравнение не имеет корней, во втором — что оно имеет бесконечно много корней, причём любое число является его корнем.

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{2x-7}{2} - \frac{4x-1}{4} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x-7}{2} - \frac{4x-1}{4}\right) \cdot 4 &= 0 \cdot 4, \\ \frac{2x-7}{2} \cdot 4 - \frac{4x-1}{4} \cdot 4 &= 0, \\ (2x - 7) \cdot 2 - (4x - 1) &= 0, \\ 4x - 14 - 4x + 1 &= 0, \\ 4x - 4x &= 14 - 1, \\ 0x &= 13. \end{aligned}$$

Уравнение $0x = 13$ не имеет корней. Значит, и равносильное ему исходное уравнение не имеет корней.

Пример 4. Решим уравнение

$$(5x - 1) - 2(3x - 6) = 11 - x.$$

Имеем

$$\begin{aligned} 5x - 1 - 6x + 12 &= 11 - x, \\ 5x - 6x + x &= 11 + 1 - 12, \\ 0x &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение $0x = 0$, а значит, и равносильное ему исходное уравнение имеет бесконечно много корней, причём любое число является его корнем.

Упражнения

534. Найдите корень уравнения:

а) $6x + 1 = 43$;
б) $-x - 4 = 11$;
в) $1{,}5 + x = 0$;
г) $2 = 13 + 0{,}5x$;
д) $5x - 8 = 1{,}5$;
е) $12x + 2 = 0$;
ж) $1 - 27x = 0$;
з) $0 = 16 - \frac{1}{3}x$;
и) $\frac{1}{6}x + 2 = 0$.

535. При каких a значение выражения $1 - \frac{2}{3}a$ равно:

а) 7; б) 0; в) -2; г) $-0{,}2$?

536. Найдите корень уравнения:

а) $3{,}5 - 3x = 2{,}3 + x$;
б) $\frac{1}{3} - x = \frac{1}{6} + 2x$;
в) $-4x + 0{,}1 = -4{,}5x - 1$;
г) $x + \frac{1}{3}x = 4 - \frac{1}{2}x$.

537. Решите уравнения из древнеегипетских папирусов:

а) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)x + 4 = 10$;

б) $\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$;

в) $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 10$;

г) $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 37$;

д) $3x + \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{3} + \frac{1}{9}x = 1$;

е) $\left(\left(x + \frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(x + \frac{2}{3}x\right)\right) \cdot \frac{1}{3} = 10$.

Замечание. Уравнение а) — из Московского математического папируса, 2000 г. до н. э., уравнения б)—е) — из папируса Ахмеса, около 1700 г. до н. э.

538. При каких значениях a значение выражения:

а) $2 - 3a$ равно удвоенному значению выражения $3 + 5a$;
б) $7 - 1{,}2a$ на 7 меньше значения выражения $1 - 1{,}1a$?

539. Решите уравнение:

а) $|x-4|=8$; г) $|1{,}2+0{,}4x|=-1$;

б) $|1{,}1-x|=1{,}2$; д) $|2{,}5-|x+2||-2{,}5=1{,}5$;

в) $|0{,}3x-1|=0$; е) $|2{,}5-|x+2||+1{,}5=2{,}5$.

540. Найдите, при каких значениях a корнем уравнения:

а) $a\cdot|2x-1|-4=5$ является число -7;

б) $3a\cdot|6x-41|+3=14$ является число 5;

в) $-2\cdot|3x-2a|+3=x-1$ является число 3;

г) $|x-a|+3=x-a+3$ является число 1.

541. Решите относительно x уравнение:

а) $6x-3y=1$;

б) $-x+2y=5$;

в) $-x+3a+b=0$;

г) $6-kx+4a=5b$ $(k\neq 0)$.

542. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $2^{2x+3}=4\cdot 8^x$;

б) $9^{x+2}=3^x\cdot 27^x$;

в) $7^{2x-3}=1$;

г) $3^{3^x}=3$?

543. Решите уравнение:

а) $(12-x)-(3x+4)=-x-1$;

б) $15+(6x-x+2)=5x$;

в) $(2+x)+(18-4x)=-(6x-2)$;

г) $-(0{,}5x+0{,}2)=x-(1{,}5x+0{,}1)$;

д) $2x+(1{,}5-3x)=1-(x+0{,}7)$;

е) $8-\left(x+\frac{1}{3}\right)=-\left(2x+7\frac{1}{3}\right)$.

544. Найдите корни уравнения:

а) $(6-x)+(12+x)-(3-2x)=15$;

б) $(1{,}5x-1)-(0{,}2x-1)=0$;

в) $8{,}2x-(5{,}8x+4)=-(0{,}6x-1)$;

г) $0=\left(\frac{1}{6}-x\right)-\left(x+\frac{1}{3}\right)+\left(2x-\frac{1}{3}\right)$;

д) $5x-8x=-(3+2x)-(x+3)$;

е) $(1{,}6+x)+(2{,}4-2x)+(x+7)=0$.

545. Решите уравнение:

а) $9 - (x - 3) - (6 - (2 - 3x)) = -x - 1$;

б) $1{,}2 - (2x - (x - 2)) - (x - 0{,}8) = -2x$;

в) $4 + (2x - (4x - 1)) + x = -5 - x$;

г) $-x - (-2x - (3x - 1)) + 4 = -3 + 4x$.

546. Существует ли значение y, при котором значения выражений

$$(12 + y) - (1 - 2y) \quad \text{и} \quad 15 - 3y:$$

а) равны;

б) являются противоположными числами?

547. При каком значении a равносильны уравнения:

а) $4(3x - a) - ax - 15 = 27$ и $0{,}5(x - 4) + 8x = 15$;

б) $6(2a - x) - 3ax + 4 = 25$ и $0{,}9x - 0{,}3(2x - 1) = 6$?

548. При каком значении b корни уравнений

$$5bx - 2(4x + b) - x = 16b \quad \text{и} \quad 1{,}6(2 + x) - 3{,}2(3x + 4) = 0$$

являются противоположными числами?

549. Найдите корень уравнения:

а) $12 - (1 - 6x)x = 3x(2x - 1) + 2x$;

б) $-(18 + 4x)x = 76 - 2x(2x - 1)$;

в) $-11 = (18 - 6x)4 - (3x + 1)5$;

г) $-(6x + 1) - 4(2 - 3x) = 3(2x - 3)$.

550. Решите уравнение:

а) $8(2x - 1) - 5(3x + 0{,}8) = x - 4$;

б) $1{,}2(3 - x) - 0{,}3(4x + 1) = 0{,}1 - 0{,}8(3x - 4)$;

в) $1{,}5 - 0{,}2(2x - 1) = 3 + (0{,}6x - 1{,}3)$;

г) $-(3{,}2 - x) = 6(0{,}3 - x) - (3x - 5)$.

551. Найдите множество значений a, при которых произведения

$$(6a - 1)(2a + 4) \quad \text{и} \quad (3a - 5)(4a + 6)$$

принимают равные значения.

552. Решите уравнение:

а) $(7x + 1)(3x - 1) - 21x^2 = 3$;

б) $(1 - 4x)(1 - 3x) = 6x(2x - 1)$;

в) $(3 - x)(4 - 8x) = x(1 + 8x)$;

г) $(1 - y)(4 - 6y) - (2y - 1)(3y + 1) = 3$.

553. Решите уравнение:

а) $7x^2 - 1 - (2x + 1)(3x - 2) = x^2$;

б) $4x(2x + 2) - (8x - 1)(x + 6) = 3$;

в) $(5 - 2x)(4 - x) - 2x(x + 6) = 1 - x$;

г) $5x(x - 8) - (5x - 2)(x + 1) = 6x$.

554. Найдите натуральные значения a, при которых корень уравнения является натуральным числом:

а) $a(3x - 2) + 2(3 + a) = 18$;

б) $3x(a - 1) - 2a(x + 4) = 4(1 - 2a)$.

555. При каких значениях p значение дроби $\frac{3-1{,}2p}{4}$ равно:

а) 0; б) -1; в) $-\frac{1}{12}$; г) 0,7?

556. При каких значениях x равны значения дробей:

а) $\frac{0{,}6-2x}{3}$ и $\frac{1{,}2-4x}{6}$; в) $\frac{1-2x}{0{,}4}$ и $\frac{3-4x}{0{,}8}$;

б) $\frac{6-0{,}1x}{4}$ и $\frac{3-0{,}05x}{2}$; г) $\frac{1+0{,}2x}{0{,}02}$ и $\frac{0{,}6x+1}{0{,}06}$?

557. При каких значениях x значения дробей являются противоположными числами:

а) $\frac{3-2x}{2}$ и $\frac{3x}{5}$; б) $\frac{x+0{,}8}{2}$ и $\frac{0{,}2+x}{4}$?

558. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{2} - \frac{x}{5} = 3$; г) $\frac{2}{3}y - \frac{y}{6} = 0$;

б) $\frac{y}{4} = y - 1$; д) $\frac{3p}{4} - p = 5$;

в) $1 - \frac{3y}{5} = 0$; е) $\frac{5x}{2} - \frac{3x}{5} = 1{,}9$.

559. Найдите корень уравнения:

а) $\frac{3-x}{2} = -\frac{x}{5}$; д) $1{,}5 = \frac{2x-1}{4} \cdot 5$;

б) $-\frac{2}{3} = \frac{x-6}{9}$; е) $-1 = \frac{3x-1}{4} \cdot 2$;

в) $\frac{x-8}{2} = \frac{2-x}{4}$; ж) $0{,}5 \cdot \frac{2x+6}{5} = x - 1$;

г) $\frac{2x-1}{4} = \frac{x}{3}$; з) $0{,}3 \cdot \frac{10x-1}{2} = 3 - x$.

560. Решите уравнение:

а) $0{,}3x - \frac{4 - 0{,}1x}{3} = \frac{0{,}3x + 1}{2}$;

б) $\frac{1 + x}{6} + \frac{1 - x}{4} = 0{,}5x + 1$;

в) $\frac{5x}{4} - x + 1 = \frac{1}{2}(3 - x)$;

г) $3 - \frac{1}{5}(5 - 2x) = \frac{x}{2}$;

д) $1{,}5 - \left(\frac{x}{4} + \frac{1 - 2x}{6}\right) = 2$;

е) $\frac{1}{3}(6x - 1) - \left(0{,}5 - \frac{x}{2}\right) = 0$;

ж) $\frac{1}{7}(5x - 1) - \left(2 + \frac{x}{2}\right) = 0$;

з) $\frac{3(x - 1)}{2} - \frac{2}{3}(2x + 1) = 4$.

561. В таблице частот некоторого статистического исследования две частоты неизвестны и отличаются друг от друга на 1. Найдите их, если среднее арифметическое данной выборки равно 6.

Варианта	4	5	6	7	8
Частота	3	2		2	

562. При каких значениях b сумма дробей

$$\frac{0{,}7 + 0{,}4b}{3} \quad \text{и} \quad \frac{0{,}7 - 0{,}1b}{2}:$$

а) равна их утроенной разности;
б) составляет 0,2 от их разности?

563. Решите уравнение:

а) $3 - \left(\frac{x + 1}{3} + \frac{3 - x}{4}\right) = 0$;

б) $1 + \frac{2x + 1}{4} = 3(x - 1)$;

в) $\frac{5}{4}x - 1 = \frac{3x - 2}{2} - \frac{x - 1}{3}$;

г) $2 - \frac{1}{3}(2x + 1) = -\frac{3x + 0{,}5}{5}$.

564. Решите уравнение:

а) $\frac{5x - 4}{2} - \frac{2x + 1}{3} = -\frac{1}{5}(x - 29)$;

б) $\frac{3 + 2x}{3} - \left(\frac{x + 1}{5} - \frac{1 - x}{6}\right) = 1$;

в) $\frac{2x + 1}{2} - \frac{3 + 4x}{9} + 0{,}5 = x$;

г) $\frac{3x - 1}{5} - \frac{1 - 2x}{2} = x - \frac{1}{4}(1 - 3x)$.

565. При каком значении y произведение:

а) $(y - 0{,}25)(y + 1{,}5)$ на 1 больше дроби $\frac{(2y + 0{,}5)(y + 1)}{2}$;

б) $(y + 0{,}2)(y - 0{,}4)$ на 0,2 меньше дроби $\frac{(5y - 1)(y + 0{,}2)}{5}$?

566. Решите уравнение:

а) $\frac{(2x+1)(2x-3)}{4} = x^2 - 1;$ в) $\frac{(1-x)(1+5x)}{5} + x^2 = 1;$

б) $x^2 - \frac{(2x-1)\cdot x}{2} = 2;$ г) $3x^2 - \frac{(3x+1)(4x-1)}{4} = 1.$

567. Зная, что в формуле $s = \frac{a+b}{2} \cdot h$ переменные принимают только положительные значения, выразите переменную a через остальные переменные.

568. Решите относительно x уравнение, в котором буквой a обозначено не равное нулю число:

а) $\frac{ax+15}{4} = 6 - a;$ в) $\frac{3ax-1}{12} = \frac{a}{6};$

б) $\frac{5-ax}{8} = a - 1;$ г) $\frac{6ax-1}{2} = \frac{1}{8}.$

Упражнения для повторения

569. Найдите значение выражения:

а) $-100a^2b^3$ при $a = -1$ и $b = 0{,}2$;

б) $-4a^2b + 3{,}04$ при $a = -0{,}1$ и $b = 50$.

570. Автомобиль двигался 1 ч 20 мин со скоростью a км/ч и 45 мин со скоростью b км/ч. Какой путь проехал автомобиль?

571. Докажите, что значение выражения

$$(2a - 1)(3a + 4) - 6(a^2 - 2) - 5a$$

не зависит от a.

19. Решение задач с помощью уравнений

Применение уравнений позволяет решать различные задачи.

А При решении задач с помощью уравнений поступают следующим образом:

1) обозначают неизвестное число буквой и составляют уравнение, используя условие задачи;
2) решают полученное уравнение;
3) истолковывают результат в соответствии со смыслом задачи.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике одна из сторон в 3 раза больше другой. Какова длина каждой стороны треугольника, если известно, что его периметр равен 119 см?

Решение. Пусть одна из сторон треугольника равна x см, тогда вторая сторона равна $3x$ см. Выразим через x длину третьей стороны. Так как треугольник равнобедренный, то она равна либо x см, либо $3x$ см. Однако третья сторона не может быть равна x см, так как в этом случае сторона треугольника оказалась бы больше суммы двух других сторон. Значит, третья сторона треугольника равна $3x$ см. По условию задачи периметр треугольника равен 119 см. Следовательно,

$$x + 3x + 3x = 119.$$

Решим составленное уравнение:

$$7x = 119,$$
$$x = 17.$$

Теперь найдём вторую сторону треугольника:

$$3x = 3 \cdot 17 = 51.$$

Ответ: стороны треугольника равны 17 см, 51 см и 51 см.

Задача 2. Требуется найти трёхзначное число, удовлетворяющее следующему условию: если к нему приписать справа цифру 5 и из полученного четырёхзначного числа вычесть 3012, то разность будет в 6 раз больше трёхзначного числа. Чему равно это число?

Решение. Пусть x — искомое трёхзначное число. Тогда, приписав к нему справа цифру 5, получим четырёхзначное число, равное $10x + 5$. По условию задачи разность $(10x + 5) - 3012$ в 6 раз больше числа x. Следовательно,

$$(10x + 5) - 3012 = 6x.$$

Решим составленное уравнение:

$$10x + 5 - 3012 = 6x,$$
$$10x - 6x = 3012 - 5,$$
$$4x = 3007,$$
$$x = 751\tfrac{3}{4}.$$

По смыслу задачи x — натуральное число, а корнем уравнения является дробное число. Значит, не существует трёхзначного числа, которое удовлетворяло бы данному условию.

Ответ: такого трёхзначного числа не существует.

Упражнения

572. Фирма арендует два помещения общей площадью 258 м^2. Найдите площадь каждого помещения, если известно, что площадь одного из них на 18 м^2 больше площади другого.

573. За две коробки конфет заплатили 320 р. Сколько стоит каждая коробка конфет, если известно, что одна из них на 20 р. дороже другой?

574. Одна сторона треугольника вдвое больше другой и на 3 см меньше третьей. Найдите стороны треугольника, если известно, что его периметр равен 38 см.

575. Имеющиеся 175 книг решили разместить на трёх полках так, чтобы на нижней полке было вдвое меньше книг, чем на средней, и на 25 меньше, чем на верхней. Сколько книг надо поставить на нижнюю полку?

576. Доску длиной 2 м распилили на три куска. Длина одного куска вдвое больше длины другого и на 30 см меньше длины третьего куска. Найдите длину каждого куска.

577. Три фирмы получили от завода-производителя 236 компьютеров. Вторая фирма получила на 10% больше компьютеров, чем первая, а третья — на 100 компьютеров меньше, чем первые две вместе. Сколько компьютеров получила каждая фирма?

578. Туристы прошли намеченный маршрут за три дня. В первый день они прошли 35% намеченного маршрута, во второй — на 3 км больше, чем в первый, а в третий — оставшиеся 21 км. Какова длина маршрута?

579. В группе учащихся, посещающих плавательный бассейн, $\frac{2}{3}$ учащихся умеют плавать. После того как ещё два ученика научились плавать, оказалось, что число учащихся, не умеющих плавать, составляет 35% числа учащихся, умеющих плавать. Сколько учащихся в группе?

580. Если к некоторому натуральному числу приписать справа цифру 1, то оно увеличится на 235. Найдите это число.

581. Если к задуманному числу приписать справа цифру 6, то оно увеличится на 249. Найдите $\frac{1}{3}$ задуманного числа.

582. Банк выплачивает доход из расчёта 6% годовых. Положив в банк некоторую сумму, вкладчик получил через год 3180 р. Какая сумма была положена в банк?

583. Какую сумму нужно положить в банк, дающий доход из расчёта 8% годовых, чтобы через год получить 4860 р.?

584. Рыболов, отправившись на рыбалку на моторной лодке, плыл по течению реки $2\frac{1}{3}$ ч, а обратно на 28 мин больше. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде равна 16,5 км/ч.

585. Туристы в 8 ч 30 мин отправились на катере с турбазы в город по течению реки. Пробыв в городе 1 ч 20 мин, они вернулись обратно, затратив на обратный путь на 20 мин больше, чем на путь до города. Успели ли туристы вернуться на турбазу к 13 ч 30 мин, если известно, что скорость катера в стоячей воде равна 20 км/ч, а скорость течения реки равна 2 км/ч?

586. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 290 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля, скорость одного из которых на 5 км/ч больше скорости другого. Через 2 ч автомобили оказались на расстоянии 20 км друг от друга. С какой скоростью ехал каждый автомобиль? Рассмотрите случаи:
а) когда автомобили ещё не встретились;
б) когда они уже миновали место встречи.

587. Мотоциклист и велосипедист едут по одной дороге, причём мотоциклист догоняет велосипедиста. В данный момент они находятся на расстоянии 30 км друг от друга. Через какое время расстояние между ними будет равно 6 км, если скорость мотоциклиста равна 34 км/ч, а скорость велосипедиста равна 16 км/ч? Рассмотрите два возможных случая.

588. Даны четыре последовательных чётных числа. Произведение двух первых из них на 232 меньше произведения двух оставшихся. Найдите эти числа.

589. Длина прямоугольного листа железа на 4 см больше ширины. От этого листа отрезали две полосы так, что остался прямоугольник, длина которого на 3 см меньше длины листа, а ширина на 2 см меньше ширины листа. Найдите размеры листа, если известно, что его площадь на 102 см^2 больше площади оставшейся части.

590. Длина прямоугольника на 5 см больше стороны квадрата, а его ширина на 2 см меньше стороны того же квадрата. Найдите площадь квадрата, если известно, что она на 32 см^2 меньше площади прямоугольника.

591. В зрительном зале кинотеатра число мест в ряду было на 3 больше числа рядов. После реконструкции число мест в ряду и число рядов увеличили на 2. В результате общее число мест в зале увеличилось на 110. Сколько рядов и сколько мест в ряду было в зале до реконструкции?

592. Чтобы перепечатать рукопись к определённому сроку, машинистка должна была печатать ежедневно по 60 страниц. Однако она печатала на 20 страниц в день больше и потому закончила перепечатку рукописи на 4 дня раньше срока. Сколько страниц в рукописи?

593. В мастерской должны были сшить определённое количество спортивных курток за 24 дня. Однако шили ежедневно на 6 курток больше, чем планировали первоначально, и потому выполнили заказ на 4 дня раньше срока. Сколько спортивных курток должны были сшить в мастерской?

594. Чтобы выполнить задание в срок, токарь должен был изготовлять ежедневно по 50 изделий. Усовершенствовав резец, он увеличил ежедневную выработку на 20% и потому выполнил задание на 2 дня раньше срока. Сколько всего изделий должен был изготовить токарь?

595. Мотоциклист рассчитал, что если он будет ехать от посёлка до станции со скоростью 32 км/ч, то приедет на станцию за 30 мин до отхода поезда. Однако из-за ненастной погоды он ехал со скоростью, на 7 км/ч меньшей, и потому опоздал к поезду на 12 мин. Чему равно расстояние от посёлка до станции?

596. Из пункта A в пункт B выехал автобус со скоростью 45 км/ч. Спустя час вслед за ним из пункта A выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч, который обогнал автобус и прибыл в пункт B на 30 мин раньше. Чему равно расстояние между пунктами A и B?

597. Из деревни в город выехал велосипедист со скоростью 16 км/ч. Спустя 30 мин навстречу ему из города отправился мотоциклист со скоростью 38 км/ч. Сколько времени находился в пути мотоциклист до встречи с велосипедистом, если известно, что расстояние от деревни до города равно 80 км?

598. Из пункта A в сторону пункта B отправился автомобиль «Москвич» со скоростью 70 км/ч. Спустя 45 мин из пункта B, удалённого от пункта A на 17,5 км, вслед за автомобилем «Москвич» выехал автомобиль «Жигули» со скоростью, на 20% большей, чем у автомбиля «Москвич». Сколько времени потребуется автомобилю «Жигули», чтобы догнать автомобиль «Москвич»?

599. Группа туристов отправилась в 8 ч утра на прогулку на моторной лодке. Отплыв от пристани по течению реки на некоторое расстояние, туристы сделали на берегу привал на 2 ч и вернулись обратно в 16 ч 15 мин. На какое расстояние отплыли туристы, если известно, что скорость лодки в стоячей воде равна 15 км/ч, а скорость течения реки равна 3 км/ч?

600. Из пункта A в пункт B, удалённый от A на расстояние 130 км, выехали одновременно автомобиль и автобус. Автомобиль, прибыв в пункт B, сразу повернул обратно и встретился с автобусом через 2 ч после своего выхода из пункта A. На каком расстоянии от пункта B произошла встреча, если известно, что скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости автобуса?

601. Из посёлка на станцию, удалённую от него на расстояние 27 км, отправились одновременно пешеход и велосипедист, причём скорость пешехода была на 10 км/ч меньше скорости велосипедиста. Прибыв на станцию, велосипедист сразу повернул обратно и встретил пешехода через 2 ч 24 мин после его выхода из посёлка. На каком расстоянии от посёлка произошла встреча?

602. Группу туристов можно рассадить в 40-местные автобусы так, что в автобусах свободных мест не останется. В связи с тем что вместо 40-местных были поданы 34-местные автобусы, пришлось заказать на

2 автобуса больше. При этом в одном из автобусов 14 мест оказались свободными. Сколько туристов было в группе?

603. Если купленные для класса тетради сложить в пачки по 45 штук, то останется одна лишняя тетрадь, а если сложить в пачки по 50 штук, то в одной пачке будет не хватать четырёх тетрадей. Сколько тетрадей куплено для класса, если пачек по 45 тетрадей получится на одну больше, чем пачек по 50 тетрадей?

604. (*Старинная задача.*) У Пифагора однажды спросили, сколько у него учеников. «Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны природы, седьмая часть упражняет силу духа. Добавьте к ним ещё трёх юношей, из коих Теон — самый способный». Сколько было учеников у Пифагора?

605. Задача о Диофанте Александрийском (III в. н. э.).

Прах Диофанта гробница покоит: дивись ей — и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребёнком
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец.
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил,
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе.
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Сколько лет прожил Диофант?

606. Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Содержание меди в первом слитке — 10%, а во втором — 40%. Эти слитки сплавили, и из них получился слиток, содержание меди в котором 30%. Определите массу полученного слитка.

Диофант Александрийский (III в.), древнегреческий математик, автор первого изложения основ алгебры, которое можно найти во введении к сочинению «Арифметика»; в этом изложении впервые для обозначения неизвестных вводится буквенная символика, рассматриваются уравнения и правила их преобразований, названные позже аль-Хорезми «аль-джебр» и «аль-мукабала».

607. Имеются два сосуда с раствором соли, причём во втором сосуде раствора на 2 л больше, чем в первом. В первом сосуде содержание соли в растворе составляет 20%, а во втором — 50%. Растворы из двух сосудов слили в один. Содержание соли в новом растворе составило 40%. Определите количество раствора, которое было во втором сосуде.

Упражнения для повторения

608. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $-x(x + 6) + (2x - 1)(x + 3) + 3$ при $x = -0{,}1$;

б) $(3a - b)(a^2 + b) + a^2(b - 3a)$ при $a = -0{,}2$; $b = -1$.

609. Докажите, что при любых a и b значение выражения

$$12a(5a - b) - (6a - b)(10a + b) - b(b - 8a)$$

равно нулю.

610. Сравните с нулём значение выражения:

а) $(-3{,}15)^3 \cdot 1{,}95$;

б) $(-2{,}4)^5 \cdot (-1{,}4)^6$;

в) $3{,}2 - 5{,}6^2$;

г) $-3{,}16 + (-4{,}12)^2$.

Контрольные вопросы и задания

1. На примере уравнения $2(3x - 5) - 3(x + 6) = 12 + 5x$ объясните, как решают уравнения с одной переменной, сводящиеся к линейным. Докажите, что полученное линейное уравнение с одной переменной равносильно данному.

2. Решите уравнение $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+2}{3} = 1$. Докажите, что в ходе решения получено линейное уравнение с одной переменной, равносильное данному.

3. Какие этапы можно выделить при решении задач с помощью уравнений?

Дополнительные упражнения к главе 4

К параграфу 7

611. Имеет ли уравнение

$$x^6 + 3x^5 + x^3 + x^2 + 6 = 0$$

положительные корни?

612. Ученик решал задачу: «Из чисел $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ выбрать те, которые являются корнями уравнения $2x^5 + 3x^3 + x + 90 = 0$». Некоторые из данных чисел он исключил сразу, не выполняя вычисления. Какие именно? Найдите корни уравнения среди оставшихся чисел.

613. Используя свойство делимости суммы, докажите, что число 11 не является корнем уравнения

$$x^5 - 6x^4 + 2x^3 - x + 102 = 0.$$

614. Даны уравнения:

а) $x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 6x + 7 = 0$;

б) $x^5 + 4x^3 + 5x - 17 = 0$;

в) $x^4 - 11x^3 + 6x - 101 = 0$;

г) $x^3 + 4x^2 - 19x + 14 = 0$;

д) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$.

Выберите из них те, для которых число -7 является корнем. Какие из этих уравнений можно исключить сразу, не выполняя вычислений?

615. Докажите, что данное уравнение не имеет целых корней:

а) $6x^5 - 12x^4 + 18x = 171$;

б) $5x^4 - 15x^3 + 45x^2 - 201 = 0$.

616. Докажите, что несократимая дробь $\frac{a}{b}$, где $a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{N}$, $b \neq 1$, не может быть корнем уравнения

$$7x^3 - 10x^2 + 12x - 1 = 0.$$

617. Имеет ли корни уравнение:

а) $x^6 + 2 = 0$; б) $|x| + 5 = 0$?

618. Докажите, что уравнения $\frac{x+3}{6} + \frac{x-7}{3} = \frac{x+11}{2}$ и $\left|\left||x-1|+2\right|-1\right|+2=0$ равносильны.

619. При каких значениях a уравнение:

а) $|x| = a$; б) $|x| = a^2$; в) $|x| = a^2 + 1$

имеет один корень; имеет два корня; не имеет корней?

620. Решите уравнение:

а) $x^2 = (-x)^2$; в) $x^3 = (-x)^3$;

б) $x^2 = -x^2$; г) $x^3 = -x^3$.

621. Укажите три каких-либо значения b, при которых корнем уравнения $bx = \frac{2}{3}$ является целое число.

622. При каких значениях a уравнение $ax = 2a - 1$:

а) имеет единственный корень;

б) имеет бесконечно много корней;

в) не имеет корней?

623. При каких значениях b уравнение $(b - 2)x = b^2 - 4$:

а) имеет единственный корень;

б) имеет бесконечно много корней;

в) не имеет корней?

К параграфу 8

624. Решите уравнение:

а) $0{,}3(2x - 1) - 0{,}4(x + 8) = 1{,}2x - 1$;

б) $1{,}6 = 0{,}8(6x - 1) - 3{,}2(x + 2) + 1$;

в) $-6(2 - 0{,}2x) + 11 = -4(3 - 0{,}3x) - 1$;

г) $-(1{,}5x - 1) - 0{,}5(x + 4) = 0$.

625. Найдите корень уравнения:

а) $(2x - 1)(3x + 7) - (1 + 6x)(x + 2) = 4$;

б) $-(x^2 - x) + (x + 1{,}5)(x - 1{,}2) = 0{,}8$;

в) $12x(x - 5) - (6x + 1)(2x - 3) = 47$;

г) $4x(1 - 9x) + (1 - 12x)(1 - 3x) + 1 = 0$.

626. Решите уравнение:

а) $-\frac{x+1}{7} + x = \frac{x+8}{14}$;

б) $-\frac{2x+1}{3} + \frac{3x+0{,}5}{5} = 1{,}2$;

в) $x^2 + x - \frac{5x^2 - x - 1}{5} = 1$;

г) $x^2 + 2 - \frac{(2x+1)(x-1)}{2} = 0$.

627. Решите относительно x уравнение:

а) $\frac{a(x-4)}{2} - \frac{a+1}{3} = 1$; б) $\frac{a(2-x)}{12} - \frac{2x-3}{8} = \frac{3}{8}$.

628. Составьте какое-либо уравнение вида $ax + c = bx + d$ с переменной x, которое:
а) имеет корень, равный 7;
б) не имеет корней;
в) имеет бесконечно много корней.

629. Найдите значение a, при котором уравнение $ax - 3 = 2x - 1$:
а) имеет корень, равный 4;
б) не имеет корней;
в) имеет бесконечно много корней.

630. Существует ли такое значение k, при котором множество корней уравнения является пустым:
а) $(k - 2)x = k^2 - 3k + 1$; б) $(k + 4)x = k^2 + k - 12$?

631. При каком значении a уравнение имеет бесконечно много корней:
а) $(a + 2)x = 6a + 12$;
б) $(a - 3)x = 2a - 4$;
в) $ax - 4x = a^2 - 16$;
г) $5ax - 2x = -(2 - 5a)$?

632. Для уравнения $ax + 2 = 3(4 - x)$ найдите значение a, при котором уравнение не имеет корней.

633. Существует ли значение a, при котором множество корней уравнения $ax - 2x = a^2 + a - 6$:
а) состоит из одного элемента;
б) является пустым;
в) является бесконечным?

634. Для малярных работ бригада закупила несколько банок краски. В первый день израсходовали половину купленных банок и ещё одну банку, а во второй — $\frac{2}{3}$ того, что было израсходовано в первый. Сколько банок краски было куплено, если известно, что две банки остались неизрасходованными?

635. Сколько картофеля завезли в магазин, если известно, что в первый день продали 33% завезённого картофеля, во второй день — в $1\frac{1}{3}$ раза больше, чем в первый, а в третий — оставшиеся 9,2 т?

636. Найдите путь, пройденный туристами в первый день, если известно, что в каждый последующий день они проходили на 2 км меньше, чем в предыдущий, а длина всего маршрута, пройденного ими за пять дней, равна 130 км.

637. Диагональ разбивает четырёхугольник на два равнобедренных треугольника с общим основанием. Периметр одного из этих треугольников на 16 см больше периметра другого. Найдите стороны четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 44 см.

638. В двузначном числе цифра единиц втрое меньше цифры десятков. Если это число разделить на 3 и к результату прибавить 8, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, взятыми в обратном порядке. Найдите заданное двузначное число.

639. Если в двузначном числе поставить цифру 4 между цифрами десятков и единиц, то получится трёхзначное число, которое на 220 больше двузначного. Найдите это двузначное число.

640. Туристы шли пешком со скоростью 4,5 км/ч, а затем ехали на автобусе со скоростью, в 10 раз большей. Расстояние, которое они проехали на автобусе, было в 6 раз больше, чем расстояние, пройденное пешком. Найдите длину маршрута туристов, если известно, что весь маршрут занял 3 ч 12 мин.

641. Пешеход, идущий на станцию, прошёл за первый час 3,5 км, и рассчитал, что если он будет двигаться с той же скоростью, то опоздает к отправлению поезда на 1 ч. Поэтому остальное расстояние он шёл со скоростью 5 км/ч и пришёл на станцию за 30 мин до отправления поезда. Какое расстояние прошёл пешеход?

642. Из пунктов *A* и *B*, расстояние между которыми 300 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля, скорость одного из которых была на 10 км/ч больше скорости другого. Спустя 3 ч автомобили встретились и, продолжив движение, оказались на расстоянии 90 км друг от друга. С какой скоростью ехал каждый автомобиль?

643. Смесь, состоящая из двух веществ, весила 0,72 кг. После того как из неё выделили 40% первого вещества и 25% второго, первого вещества оказалось в смеси на 270 г больше, чем второго. Сколько весило первоначально каждое вещество, входящее в смесь?

644. Из бутыли вместимостью 20 л, наполненной доверху спиртом, отлили часть спирта и долили в бутыль воды. В результате в бутыли оказался 60%-ный раствор спирта. Сколько спирта отлили из бутыли?

645. Четыре последовательных натуральных числа таковы, что произведение наименьшего и наибольшего из них на 2 меньше произведения двух остальных. Найдите наименьшее из этих чисел.

646. Найдите четыре последовательных натуральных числа, таких, что произведение наименьшего из них и следующего за ним на 30 меньше произведения двух остальных.

647. Школьная спортивная площадка прямоугольной формы имеет длину, на 14 м бóльшую, чем ширину. Окаймляющая её дорожка имеет ширину 1,5 м. Найдите размеры площадки, если известно, что площадь, занимаемая дорожкой, равна 219 м^2.

Глава 5 Разложение многочленов на множители

В этой главе продолжается изучение теории многочленов: рассматриваются способы разложения многочленов на множители (вынесение за скобки общего множителя и группировка), а также применение разложения многочленов на множители для рационализации числовых вычислений, доказательства тождеств и решения уравнений.

§ 9. Способы разложения многочленов на множители

20. Вынесение общего множителя за скобки

При решении уравнений и неравенств и в ряде других случаев бывает удобно данный многочлен представить в виде произведения двух или более многочленов, среди которых могут быть и одночлены.

Например, для нахождения значения многочлена $ab + bc$ при $a = 5{,}2$, $b = 19{,}7$ и $c = 4{,}8$ удобно, используя распределительное свойство умножения, представить этот многочлен в виде $b(a + c)$.

Теперь легко найти значение многочлена $ab + bc$ при указанных значениях переменных a, b и c:

$$ab + bc = b(a + c) = 19{,}7 \cdot (5{,}2 + 4{,}8) = 19{,}7 \cdot 10 = 197.$$

Представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов называют *разложением многочлена на множители*.

Рассмотрим многочлен $14ab - 63b^2$. Попытаемся разложить его на множители.

Каждый его член заменим произведением двух одночленов, один из которых равен $7b$, и применим распределительное свойство умножения:

$$14ab - 63b^2 = 7b \cdot 2a - 7b \cdot 9b = 7b(2a - 9b).$$

Мы разложили многочлен на множители, представив его в виде произведения одночлена $7b$ и многочлена $2a - 9b$. Такой способ разложения многочлена на множители называют *вынесением общего множителя за скобки*.

Рассмотрим примеры разложения многочлена на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки.

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$18a^4x^2 - 30a^3x^3 + 54a^2x^4.$$

За скобки можно вынести различные одночлены: a, $-3x$, $2ax$ и др. Например, если мы вынесем за скобки одночлен $2ax$, то получим такое разложение:

$$18a^4x^2 - 30a^3x^3 + 54a^2x^4 = 2ax(9a^3x - 15a^2x^2 + 27ax^3).$$

Это разложение можно ещё продолжить, вынеся за скобки одночлен $3ax$.

Обычно за скобки выносят такой одночлен, чтобы после его вынесения в скобках остался многочлен, у которого коэффициенты — взаимно простые числа и его члены не содержат общего буквенного множителя. В данном случае таким «наибольшим» одночленом является одночлен $6a^2x^2$. Имеем

$$18a^4x^2 - 30a^3x^3 + 54a^2x^4 = 6a^2x^2(3a^2 - 5ax + 9x^2).$$

Чтобы проверить правильность выполненного разложения на множители, достаточно умножить одночлен $6a^2x^2$ на многочлен в скобках и сравнить полученное произведение с исходным многочленом.

Пример 2. Разложим на множители выражение

$$5x(a - 8) + y(a - 8).$$

Данное выражение — сумма двух слагаемых, каждое из которых содержит общий множитель $a - 8$. Вынесем этот множитель за скобки. Получим

$$5x(a - 8) + y(a - 8) = (a - 8)(5x + y).$$

Пример 3. Разложим на множители сумму

$$2x(a - b) + y(b - a).$$

Слагаемые в этой сумме содержат множители $a - b$ и $b - a$, которые являются противоположными выражениями (их значения отличаются лишь знаками). Если в произведении $y(b - a)$ у каждого множителя поменять знаки на противоположные, то получим выражение $-y(a - b)$, тождественно равное $y(b - a)$. Учитывая это, запись преобразований можно вести так:

$$2x(a - b) + y(b - a) =$$
$$= 2x(a - b) - y(a - b) = (a - b)(2x - y).$$

Упражнения

648. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $3a + 6b$;	г) $7n - 14$;	ж) $8a + 24b - 12$;
б) $2x - 8y$;	д) $18a + 9$;	з) $-49y - 14y - 63$;
в) $3m + 12$;	е) $10x - 25y$;	и) $36p - 24q + 54$.

649. Разложите выражение на множители:

а) $5ab + 5bc$; г) $x^2 - xy - 2x$;

б) $4ax - 12bx$; д) $16a^2 - 42ab + 64b^2$;

в) $7cy^2 + 49c^2y$; е) $-m^2n + 5mn^2 - 6m^2n^2$.

650. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $x^3 - x$; г) $7c^4 - 9c^2$;

б) $y^4 + y$; д) $18m^{14} - 27m^7$;

в) $b^4 - b^5$; е) $-72n^5 - 27n^{10}$.

651. Разложите выражение на множители (n — натуральное число):

а) $x^{n+2} - x^n$; г) $a^nb^{3n} - a^nb^{2n}$;

б) $y^{2n} - 2y^n$; д) $p^{5n+1}q - p^{3n-1}q$;

в) $z^{2n-2} + z^{n-1}$; е) $a^2x^{n+3} + a^{n+1}x^{n-1}$.

652. Докажите, что при $n \in N$ значение выражения:

а) $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+3}$ кратно 11;

б) $3^{n+4} - 3^{n+1} - 3^n$ кратно 77;

в) $125 \cdot 25^n - 5^{2n+1}$ имеет три простых делителя;

г) $7^{2n} \cdot 7 + 49^n : 7$ имеет три простых делителя.

653. Найдите значение выражения:

а) $45a + 45b$ при $a = 9{,}7$, $b = 11{,}3$;

б) $58x - 29y$ при $x = 4{,}175$, $y = 7{,}85$;

в) $ac - a^2$ при $a = -4{,}73$, $c = 5{,}27$;

г) $b^2d - b^3$ при $b = -1{,}2$, $d = 3{,}8$.

654. Разложите выражение на множители:

а) $2a^3 - 10a^2 + 14a$; д) $a^2b - ab^2 + a^2b^2$;

б) $6b^2 + 9b^3 - 12b^4$; е) $x^4y^2 + x^3y^3 - x^2y^4$;

в) $x^5 - x^3 + x^2$; ж) $1{,}2p^2q - 1{,}8pq^2 - 3pq^3$;

г) $-y^3 + y^5 - y^7$; з) $1\frac{2}{5}m^3n^2 + 4\frac{1}{5}m^2n^2 - 8{,}4mn^2$.

655. Найдите значение выражения:

а) $35a^3b - 4a^2b^2 + 20a^3b^2$ при $a = 2$, $b = 5$;

б) $40x^2y - 80xy^2 - 160x^2y^2$ при $x = 0{,}5$, $y = -1{,}25$.

656. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $a(b - c) + 10(b - c)$; д) $(a - b)^2 + 3(a - b)$;

б) $7(a + x) - b(a + x)$; е) $(x - 1)^2 + 7(x - 1)$;

в) $c(a + b) + (a + b)$; ж) $(b + 5)^2 - b(b + 5)$;

г) $a(x - y) - (x - y)$; з) $-2a(a + 4) + (a + 4)^2$.

657. Разложите выражение на множители:

а) $x(a - x) + y(x - a)$;
б) $b(c - b) - d(b - c)$;
в) $2x(3x - 5) + 17(5 - 3x)$;
г) $(a - b)^2 - a(b - a)^2$;
д) $(x - y)^2 + b(y - x)$;
е) $a(x - 5)^2 - b(5 - x)$.

658. Представьте выражение в виде произведения трёх множителей:

а) $2x^2(y - 1) - x(y - 1)$;
б) $a(b + 2) + a^2(b + 2)$;
в) $3y(x - 7) + y^2(7 - x)$;
г) $a^2(a - b) - a(b - a)$;
д) $36ax(2x - a) + 9(a - 2x)$;
е) $15a(x - 2)^2 - 3a(x - 2)$.

659. Разложите выражение на множители:

а) $5a(a - 5b) + (a + 3b)(a - 5b)$;
б) $(3x - 4y)(2x - 5y) - 3y(4y - 3x)$;
в) $(a + 9x)(a^2 - 4ax) - 5ax(a + 9x)$;
г) $(p - 10q)(pq + 25) + 5(50q - 5p)$.

Упражнения для повторения

660. Решите уравнение:

а) $0{,}5x(x^2 - 1{,}2x + 1) - 3x\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}\right) = 1$;
б) $5x + 2x(2 - 3x) = 3x(5 - 2x) - 12$.

661. Найдите корень уравнения:

а) $\frac{30y - 25}{2} - \frac{10y - 5}{3} = 2$;
б) $\frac{8y - 7}{4} = \frac{9y + 2}{5} - 2$.

662. Дорога из города A в город B, длина которой 260 км, идёт сначала в гору, а потом под гору. Поднимаясь в гору, автобус ехал со скоростью 30 км/ч, а спускаясь — со скоростью 50 км/ч, спускался автобус на 2 ч дольше, чем поднимался. Какое время затратил автобус на весь путь?

663. Упростите выражение:

а) $(x - 3)(x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81)$;
б) $(y^2 + 8y - 6)(y^2 - 5y + 7) - (y^2 - 2y + 4)(y^2 + 5y - 33)$.

21. Способ группировки

Вы познакомились с разложением многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки. Рассмотрим другой способ, который позволяет разложить многочлен на множители с помощью группировки его членов.

Будем рассуждать так. Пусть произведение $(a + c)(b - 5)$ было получено в результате разложения на множители некоторого многочлена. Представим выражение $(a + c)(b - 5)$ в виде многочлена, выполнив преобразование:

$$(a + c)(b - 5) = a(b - 5) + c(b - 5) = ab - 5a + bc - 5c.$$

Теперь это преобразование запишем в обратном порядке:

$$ab - 5a + bc - 5c = a(b - 5) + c(b - 5) = (a + c)(b - 5).$$

Промежуточное выражение, т. е. сумму $a(b - 5) + c(b - 5)$, можно получить из многочлена $ab - 5a + bc - 5c$, если сгруппировать отдельно первый и второй, а также третий и четвёртый его члены, заключив их в скобки. Иначе говоря, преобразование можно выполнить так:

$$ab - 5a + bc - 5c = (ab - 5a) + (bc - 5c) =$$
$$= a(b - 5) + c(b - 5) = (b - 5)(a + c).$$

Такой способ разложения многочлена на множители называют *способом группировки*.

Рассмотрим примеры применения этого способа.

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$6xy + ab - 2bx - 3ay.$$

Группировка первого члена со вторым и третьего с четвёртым ничего не даёт, так как эти группы не содержат общего множителя.

Сгруппируем первый член с третьим и второй с четвёртым, получим

$$6xy + ab - 2bx - 3ay = (6xy - 2bx) + (ab - 3ay).$$

В первой группе вынесем за скобки множитель $2x$, а во второй — множитель a:

$$(6xy - 2bx) + (ab - 3ay) = 2x(3y - b) + a(b - 3y).$$

В полученном выражении слагаемые содержат множители $3y - b$ и $b - 3y$, которые являются противоположными выражениями (их значения отличаются лишь знаками). Вынесем за скобки множитель $3y - b$, изменив знак у множителя a на противоположный:

$$2x(3y - b) + a(b - 3y) =$$
$$= 2x(3y - b) - a(3y - b) = (3y - b)(2x - a).$$

Итак,

$$6xy + ab - 2bx - 3ay = (3y - b)(2x - a).$$

Заметим, что группировку членов этого многочлена для его разложения на множители можно было провести иначе:

$$6xy + ab - 2bx - 3ay = (6xy - 3ay) + (ab - 2bx) =$$
$$= 3y(2x - a) + b(a - 2x) = 3y(2x - a) - b(2x - a) =$$
$$= (2x - a)(3y - b).$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$x^2 - 3xy + xz + 2x - 6y + 2z.$$

Этот многочлен можно разложить на множители, представив его в виде суммы двух трёхчленов или в виде суммы трёх двучленов.

В первом случае имеем

$$x^2 - 3xy + xz + 2x - 6y + 2z =$$
$$= (x^2 - 3xy + xz) + (2x - 6y + 2z) =$$
$$= x(x - 3y + z) + 2(x - 3y + z) = (x - 3y + z)(x + 2).$$

Во втором случае имеем

$$x^2 - 3xy + xz + 2x - 6y + 2z =$$
$$= (x^2 + 2x) - (3xy + 6y) + (xz + 2z) =$$
$$= x(x + 2) - 3y(x + 2) + z(x + 2) = (x + 2)(x - 3y + z).$$

Разумеется, группировку нужно производить так, чтобы в каждой группе оказался общий множитель, кроме того, после вынесения общего множителя за скобки в каждой группе полученные выражения также должны иметь общий множитель.

Пример 3. Разложим на множители трёхчлен

$$x^2 - 8x + 15.$$

Если вам удастся разложить этот трёхчлен на множители, то произведение будет иметь вид

$(x + a)(x + b)$, где a и b — неизвестные нам числа.

Представим произведение $(x + a)(x + b)$ в виде многочлена:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab =$$
$$= x^2 + (a + b)x + ab.$$

Трёхчлен $x^2 + (a + b)x + ab$ должен быть тождественно равен данному трёхчлену $x^2 - 8x + 15$. Это возможно, если $a + b = -8$ и $ab = 15$. Подбором находим неизвестные числа $a = -3$, $b = -5$. Следовательно, $x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$.

Полученный результат подсказывает и другой путь. Представим $-8x$ в виде суммы $-3x - 5x$. Тогда:

$$x^2 - 8x + 15 = x^2 - 3x - 5x + 15 =$$
$$= (x^2 - 3x) - (5x - 15) = x(x - 3) - 5(x - 3) =$$
$$= (x - 3)(x - 5).$$

Заметим, что не всякий многочлен можно представить в виде произведения двух многочленов ненулевой степени. Такими примерами могут служить двучлен $x^2 + 1$, трёхчлен $x^2 - x + 1$.

Упражнения

664. Разложите на множители выражение:

а) $b(a + c) + 2a + 2c$;

б) $c(a - b) + 3a - 3b$;

в) $x - y + a(x - y)$;

г) $y(b - x) + x - b$.

665. Разложите на множители многочлен:

а) $na + nb + 5a + 5b$;

б) $7x - 7y + bx - by$;

в) $10a - by + 10b - ay$;

г) $pq - x - px + q$;

д) $b - a - ab + 1$;

е) $2cx - cy - 6x + 3y$;

ж) $15ax - 14by + 10bx - 21ay$;

з) $56pq - 1 - 7q + 8p$.

666. Представьте в виде произведения многочлен:

а) $a^2 + 3ab - 2a - 6b$;

б) $7xy - x^2 - x + 7y$;

в) $a^3 + a^2 - a - 1$;

г) $b^3 - b^2 + b - 1$;

д) $x^4 + 3x^3 - x - 3$;

е) $y^5 - y^3 + y^2 - 1$;

ж) $a^7 + a^5 - a^2 - 1$;

з) $b^8 + 3b^5 - 2b^3 - 6$.

667. Разложите на множители многочлен:

а) $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$;

б) $ac^2 - ad - bc^2 + cd + bd - c^3$;

в) $x^4 - x^2y^2 + ay^2 - ax^2 - x^2 + a$;

г) $b^3y^2 - cb^3 + by^2 + y^2 - bc - c$.

668. Представьте в виде произведения трёх множителей многочлен:

а) $x^2y - bx^2 - axy + abx$;

б) $m^3n - 2m^3 + mn - 2m$;

в) $6a^2b + 14ab^2 - 9a^2c - 21abc$;

г) $15x^2y^2 - 24xy^3 - 10x^2z + 16xyz$.

669. Разложите выражение на множители:

а) $x^{n+1} + 2x^n - x - 2$;

б) $3x^{n+2} - x^n - 3x^2 + 1$;

в) $ax^{n-1} + 2x^n - 2x - a$;

г) $a^2 \cdot x^{n+1} - ax^n + ax - 1$.

670. Разложите на множители трёхчлен:

а) $x^2 - 5x + 6$; в) $x^2 + x - 12$;

б) $x^2 + 11x + 24$; г) $x^2 - x - 30$.

671. Найдите значение выражения:

а) $12ab - 18a - 20b + 30$ при $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{3}{4}$;

б) $72a^2 + 42ab - 6ac - 12a - 7b + c$ при $a = \frac{5}{6}$, $b = \frac{2}{7}$, $c = -1$.

Упражнения для повторения

672. Разложите на множители многочлен:

а) $2x^3 - 14x^2 + 18x$; в) $a(x - 2y) - ab(x - 2y)$;

б) $y^6 - 2y^4 + 3y^2$; г) $x(a^2 - ab) + y(ab - a^2)$.

673. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной x:

а) $(x - 12)(x + 7) - (x + 5)(x - 10)$;

б) $x^3 - (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

674. Из двух городов A и B, расстояние между которыми 110 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Через полчаса после начала движения расстояние между ними составляло 25 км. Найдите скорости мотоциклистов, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого.

? Контрольные вопросы и задания

1. Какое преобразование называют разложением многочлена на множители?

2. На примере многочлена $10a^2 - 5ab$ объясните, как выполняется разложение на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки.

3. На примере многочлена $xy - 3y + 8x - 24$ объясните, как выполняется разложение на множители способом группировки.

§ 10. Применение разложения многочленов на множители

22. Вычисления. Доказательство тождеств

Разложение многочлена на множители позволяет в некоторых случаях более рационально производить вычисления, решать задачи на делимость, доказывать тождества.

Пример 1. Пусть требуется найти значение суммы

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9.$$

Вынесем число 2 за скобки. Получим

$$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 =$$
$$= 2(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^8).$$

Обозначим сумму $2 + 2^2 + \ldots + 2^8$ буквой x. Перепишем предыдущее равенство в виде

$$x + 2^9 = 2(1 + x).$$

Решим это уравнение:

$$x + 2^9 = 2 + 2x,$$
$$x = 2^9 - 2,$$
$$x = 510.$$

Отсюда находим значение данной суммы:

$$510 + 2^9 = 510 + 512 = 1022.$$

Пример 2. Найдём значение выражения

$$38{,}4^2 - 61{,}6 \cdot 29{,}5 + 61{,}6 \cdot 38{,}4 - 29{,}5 \cdot 38{,}4.$$

Попытаемся разложить это выражение на множители способом группировки:

$$38{,}4^2 - 61{,}6 \cdot 29{,}5 + 61{,}6 \cdot 38{,}4 - 29{,}5 \cdot 38{,}4 =$$
$$= (38{,}4^2 - 29{,}5 \cdot 38{,}4) + (61{,}6 \cdot 38{,}4 - 61{,}6 \cdot 29{,}5) =$$
$$= 38{,}4(38{,}4 - 29{,}5) + 61{,}6(38{,}4 - 29{,}5) =$$
$$= (38{,}4 - 29{,}5)(38{,}4 + 61{,}6) = 8{,}9 \cdot 100 = 890.$$

Пример 3. Докажем, что значение выражения

$$81^4 - 9^7 + 3^{12}$$

кратно 73.

Представим каждое слагаемое в виде степени с основанием 3, а затем выполним разложение на множители:

$$81^4 - 9^7 + 3^{12} = (3^4)^4 - (3^2)^7 + 3^{12} =$$
$$= 3^{16} - 3^{14} + 3^{12} = 3^{12}(3^4 - 3^2 + 1) =$$
$$= 3^{12}(81 - 9 + 1) = 3^{12} \cdot 73.$$

Так как в произведении $3^{12} \cdot 73$ один из множителей делится на 73, а другой — целое число, то произведение делится на 73.

Разложение на множители находит применение при доказательстве тождеств.

Пример 4. Докажем тождество

$$(a^2 + 3a)^2 + 2(a^2 + 3a) = a(a + 1)(a + 2)(a + 3).$$

Для доказательства тождества $A = B$ используют три различных приёма:

1) преобразуют выражение A, приводя его к выражению B;
2) преобразуют выражение B, приводя его к выражению A;
3) преобразуют оба выражения, A и B, приводя их к одному и тому же выражению C.

Мы пойдём по первому пути, выполнив следующее преобразование:

$$\begin{aligned}(a^2 + 3a)^2 + 2(a^2 + 3a) &= (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) = \\ &= (a^2 + 3a)(a^2 + 2a + a + 2) = \\ &= (a^2 + 3a)((a^2 + 2a) + (a + 2)) = \\ &= a(a + 3)(a(a + 2) + (a + 2)) = \\ &= a(a + 3)(a + 2)(a + 1) = \\ &= a(a + 1)(a + 2)(a + 3).\end{aligned}$$

В процессе этого преобразования мы сначала применили способ вынесения общего множителя за скобки, а затем способ группировки (предварительно разбив средний член $3a$ трёхчлена $a^2 + 3a + 2$ на два слагаемых $2a$ и a).

Если идти по второму пути, то преобразование целесообразно выполнить так:

$$\begin{aligned}a(a + 1)(a + 2)(a + 3) &= (a(a + 3))((a + 1)(a + 2)) = \\ &= (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2).\end{aligned}$$

Выражение $a^2 + 3a$ удобно обозначить какой-нибудь буквой, например x. Тогда получим

$$\begin{aligned}&(a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) = \\ &= x(x + 2) = x^2 + 2x.\end{aligned}$$

Произведя обратную замену x на $a^2 + 3a$, имеем

$$x^2 + 2x = (a^2 + 3a)^2 + 2(a^2 + 3a).$$

Доказательство тождества третьим способом проделайте самостоятельно.

Пример 5. Докажем, что значение выражения

$$(x - y)(x + y) - 2x(x - y)$$

при любых неравных между собой значениях x и y является отрицательным числом.

Выполним разложение на множители:

$$(x - y)(x + y) - 2x(x - y) = (x - y)(x + y - 2x) =$$
$$= (x - y)(y - x) = (x - y)(-(x - y)) = -(x - y)^2.$$

Значение выражения $(x - y)^2$ при неравных между собой значениях x и y — положительное число. Следовательно, значение противоположного ему выражения, т. е. $-(x - y)^2$, является отрицательным числом.

Упражнения

675. Найдите значение выражения:

а) $37{,}2 \cdot 22{,}8 + 37{,}2^2$;

б) $43{,}7 \cdot 56{,}3 + 43{,}7^2$;

в) $45{,}2 \cdot 1{,}38 + 1{,}38 \cdot 17{,}3 + 37{,}5 \cdot 1{,}38$;

г) $2{,}9 \cdot 7{,}83 + 5{,}07 \cdot 2{,}9 - 2{,}9^2$.

676. Вычислите:

а) $4{,}2 \cdot 13{,}5 - 8{,}3 \cdot 5{,}8 - 4{,}2 \cdot 8{,}3 + 13{,}5 \cdot 5{,}8$;

б) $\frac{1}{3} \cdot 17 + 47 \cdot \frac{1}{6} + 17 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 47$.

677. Найдите значение дроби

$$\frac{17 \cdot 13 - 5 \cdot 13 - 17 \cdot 3 + 5 \cdot 3}{3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4^2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 5}.$$

678. Найдите значение суммы:

а) $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6$;

б) $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5$.

679. Докажите, что значение выражения:

а) $7^{10} - 7^9 - 7^8$ кратно 41;

б) $5^8 + 5^7 + 5^6$ кратно 31;

в) $36^4 + 6^7$ кратно 7;

г) $27^5 - 9^6$ кратно 26.

680. Докажите, что значение дроби $\frac{6^{10} - 6^9 - 6^8}{3^{11} + 3^9 - 3^8}$ — целое число.

681. Докажите тождество:

а) $a(b - c) = -a(c - b)$;

б) $(a - x)(b + y) + (a - x)(b - y) = 2b(a - x)$;

в) $a(b - c + d) = -a(c - b - d)$;

г) $(a - b)(c - d) = (b - a)(d - c)$;

д) $(a - b)(b - c) + (b - a)(b - c) = 0$;

е) $2a(a - b) + 4ab = 2a(a + b)$.

682. Докажите тождество:

а) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$;

б) $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$;

в) $x^2 + x - 6480 = (x - 80)(x + 81)$;

г) $(a + b)^2 - 7(a + b) + 12 = (a + b - 3)(a + b - 4)$;

д) $(a + b)^2 - 2(a + b) - 35 = (a + b - 7)(a + b + 5)$;

е) $(a - b)^2 - 6(a - b) - 16 = (a - b - 8)(a - b + 2)$.

683. Является ли тождеством равенство:

а) $(x - 15)(x + 8) + 132 = (x - 3)(x - 4)$;

б) $(x - 8)(x - 10) = x^2 + 80$;

в) $(y - 2)(y^2 + 5) = y^3 - 10$;

г) $(y - 1)(y^2 + 1) = y^3 - y^2 + y - 1$?

684. Докажите тождество:

а) $(a + b)^2 - 2(a + b - 1) - 1 = (a + b - 1)^2$;

б) $a^3 - a^2 + a - 1 = (a - 1)(a^2 + 1)$;

в) $a^3 - a^2 - a + 1 = (a - 1)^2(a + 1)$;

г) $a^3 + a^2 - a - 1 = (a^2 - 1)(a + 1)$.

685. Докажите, что значение выражения

$$(a - 2b)(a + 2b) + 4b(a + 2b)$$

при любых a и b является неотрицательным числом.

686. Докажите, что значение выражения

$$3y(x - 3y) + x(3y - x)$$

при любых x и y не является положительным числом.

687. Докажите, что площадь фигуры, изображённой на рисунке 9, равна удвоенной площади квадрата со стороной m.

688. Докажите, что разность $111\,111 - 222$ является квадратом натурального числа.

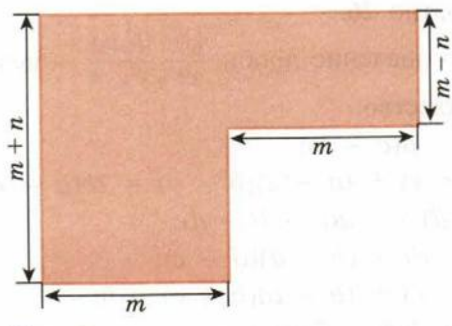


Рис. 9

689. Найдите ошибку в рассуждениях.

Пусть $a \neq b$ и $a - b = c$. Умножим обе части равенства на $a - b$, получим

$$(a - b)(a - b) = c(a - b).$$

Раскроем скобки и получим

$$a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc,$$

или

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc.$$

Разложим правую и левую части равенства на множители:

$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Сократив обе части равенства на множитель $(a - b - c)$, получим

$$a = b.$$

Итак, любые два различных числа равны.

Упражнения для повторения

690. Разложите на множители многочлен:

а) $7x^3 - 42x^2 + 63x$;

б) $(y - x)^2 - 8(x - y)$;

в) $7a + 3a^2b - 14b - 6ab^2$;

г) $ax^2 + 2bx^2 - 3a - 9c + 3cx^2 - 6b$.

691. Упростите выражение:

а) $a(5b - c) - b(6c - a) + c(a + 7b)$;

б) $y^3(x^3 + x^2 + 1) - x^3(y^3 + y^2 + 1) + x^2y^2(x - y)$.

692. Сторона квадрата на 6 см меньше одной из сторон прямоугольника и на 5 см больше другой его стороны. Какова длина стороны квадрата, если его площадь на 14 см^2 меньше площади прямоугольника?

23. Решение уравнений с помощью разложения на множители

Рассмотрим примеры решения уравнений, в которых применяется разложение многочлена на множители. При этом будем использовать следующее правило:

произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысла.

Пример 1. Решим уравнение $5x^2 - 15x = 0$.

Разложив левую часть уравнения на множители, получим

$$5x(x - 3) = 0.$$

Это уравнение равносильно данному, так как его левую часть, т. е. выражение $5x^2 - 15x$, мы заменили тождественно равным ему выражением $5x(x - 3)$.

Произведение $5x(x - 3)$ равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю хотя бы один из множителей.

В данном случае произведение $5x(x - 3)$ равно нулю, когда $5x = 0$ или $x - 3 = 0$.

Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений, т. е. корнями уравнения $5x^2 - 15x = 0$ являются как корень уравнения $5x = 0$, так и корень уравнения $x - 3 = 0$. Первое уравнение имеет корень, равный 0, второе уравнение — корень, равный 3.

Запись решения уравнения можно вести так:

$$5x^2 - 15x = 0,$$
$$5x(x - 3) = 0,$$
$$5x = 0 \quad \text{или} \quad x - 3 = 0,$$
$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 3.$$

Ответ: 0; 3.

Пример 2. Решим уравнение $x^3 - 8x^2 + 3x - 24 = 0$.

Разложим на множители левую часть уравнения способом группировки. Имеем

$$(x^3 - 8x^2) + (3x - 24) = 0,$$
$$x^2(x - 8) + 3(x - 8) = 0,$$
$$(x - 8)(x^2 + 3) = 0,$$
$$x - 8 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 3 = 0,$$
$$x = 8.$$

Второе уравнение не имеет корней, так как при любом x значение выражения $x^2 + 3$ — положительное число.

Ответ: 8.

Пример 3. Решим уравнение $(2x - 5)(x + 3) = 7x + 21$.

Перенесём выражение $7x + 21$ в левую часть уравнения (изменив его знак) и разложим полученное выражение на множители. Имеем

$$(2x - 5)(x + 3) - (7x + 21) = 0,$$
$$(2x - 5)(x + 3) - 7(x + 3) = 0,$$
$$(x + 3)(2x - 5 - 7) = 0,$$
$$(x + 3)(2x - 12) = 0,$$
$$x + 3 = 0 \quad \text{или} \quad 2x - 12 = 0,$$
$$x = -3 \quad \text{или} \quad x = 6.$$

Ответ: –3; 6.

Пример 4. Решим уравнение $(y^2 - 5y)^2 = 30y - 6y^2$.
Имеем
$$(y^2 - 5y)^2 - (30y - 6y^2) = 0,$$
$$(y^2 - 5y)^2 + 6(y^2 - 5y) = 0,$$
$$(y^2 - 5y)(y^2 - 5y + 6) = 0,$$
$$y^2 - 5y = 0 \text{ или } y^2 - 5y + 6 = 0.$$
Решим первое уравнение:
$$y(y - 5) = 0,$$
$$y = 0 \text{ или } y = 5,$$
$$y_1 = 0,\ y_2 = 5.$$
Решим второе уравнение:
$$y^2 - 2y - 3y + 6 = 0,$$
$$(y^2 - 2y) - (3y - 6) = 0,$$
$$y(y - 2) - 3(y - 2) = 0,$$
$$(y - 2)(y - 3) = 0,$$
$$y - 2 = 0 \text{ или } y - 3 = 0,$$
$$y = 2 \text{ или } y = 3,$$
$$y_3 = 2,\ y_4 = 3.$$
Ответ: 0; 2; 3; 5.

Упражнения

693. Решите уравнение:

а) $x(x - 10) = 0$;
б) $2x(x + 5) = 0$;
в) $(5x + 1)(x - 9) = 0$;
г) $(x - 8)(40x + 8) = 0$;
д) $x(x - 2)(x - 3) = 0$;
е) $(x + 2)(x + 4)(x - 6) = 0$.

694. Найдите корни уравнения:

а) $x^2 - 7x = 0$;
б) $x^2 + x = 0$;
в) $2x^2 - 3x = 0$;
г) $5x^2 + 2x = 0$;
д) $3x^2 - 1{,}8x = 0$;
е) $0{,}5x^2 + 4x = 0$;
ж) $\frac{1}{3}x^2 - x = 0$;
з) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x = 0$.

695. Найдите множество корней уравнения:

а) $y(y - 5) - 7(y - 5) = 0$;

б) $y(y - 2) + 4(2 - y) = 0$;

в) $2y^2 - 50y = 75 - 3y$;

г) $15y^2 + 6y = 5y + 2$;

д) $y^3 - 2y^2 + y - 2 = 0$;

е) $y^3 + 6y^2 - y - 6 = 0$;

ж) $y^3 + 3y = 8y^2 + 24$;

з) $y^3 - 12 = 3y^2 - 4y$.

696. Отметьте на координатной прямой числа, являющиеся корнями уравнения:

а) $(x + 2)^2 = \frac{x}{2} + 1$;

б) $\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 = 4 - x$;

в) $(|x| - 3)^2 + 3 = |x|$;

г) $3|x| + 6 = (2 + |x|)^2$.

697. Сравните больший корень первого уравнения с меньшим корнем второго:

а) $2^{|x| + 1} = 4$ и $(3x - 2)^2 - 6x + 4 = 0$;

б) $|5x - 3| = 1$ и $2(x - 1)^2 + 1 = x$.

698. Докажите, что уравнение:

а) $x(x + 2)(x + 5) - 4x(x + 2) = 0$ не имеет положительных корней;

б) $(x + 17)(x - 8) = 21(x - 8)$ не имеет отрицательных корней.

699. Решите уравнение:

а) $x^2 - 15x + 56 = 0$;

б) $x^2 + 10x + 21 = 0$;

в) $x^2 + x - 72 = 0$;

г) $x^2 - 3x - 18 = 0$.

700. Решите уравнение:

а) $(x^2 - 7x)^2 + 10(x^2 - 7x) = 0$;

б) $(x^2 - x)^2 - 12(x^2 - x) = 0$.

701. Произведение двух последовательных натуральных чётных чисел в 1,5 раза больше квадрата меньшего из них. Найдите эти числа.

702. Трёхзначное число оканчивается цифрой 6. Если её зачеркнуть, то полученное число будет меньше данного на 366. Найдите данное трёхзначное число.

703. Трёхзначное число оканчивается цифрой 7. Если эту цифру перенести на первое место, то полученное число будет на 17 меньше утроенного первоначального числа. Найдите данное трёхзначное число.

Упражнения для повторения

704. Докажите, что значение выражения:

а) $9^5 - 9^4 + 9^3$ кратно 73;

б) $2^8 + 2^6 - 2^4 - 2^2$ кратно 75;

в) $10^6 - 20^4$ кратно 84;

г) $12^5 - 18^4$ кратно 37.

705. Докажите тождество:

а) $a(b - a)(c + a) + a(a - b)(a + c) = 0$;

б) $(x - 2)(x - 3)(x^2 - 5x + 6) = (x - 2)^2(x - 3)^2$.

706. Прочитайте выражение:

а) $(2a - b)(2a + b)$;

б) $(3a + 1)(3a - 1)$;

в) $a^2 - b^2$;

г) $(a - b)^2$.

707. Запишите выражение:

а) произведение суммы и разности выражений $3m$ и n;

б) произведение разности и суммы выражений x и $4y$;

в) квадрат разности выражений $2x$ и m;

г) разность квадратов выражений $2x$ и m.

708. Периметр прямоугольника равен 28 см. Если его длину уменьшить на 3 см, а ширину увеличить на 2 см, то площадь прямоугольника уменьшится на 8 см². Какова площадь прямоугольника?

? Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, как рационально найти значение выражения

$$3{,}6^2 - 3{,}6 \cdot 1{,}2 + 2{,}4^2,$$

используя разложение на множители.

2. Объясните, как используется разложение на множители при решении уравнения, взяв в качестве примера уравнение

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 35 = 0.$$

Дополнительные упражнения к главе 5

К параграфу 9

709. Разложите на множители многочлен:

а) $x^5 + x^4 + x^3$;
б) $y^7 - y^5 + y^3 - y^2$;
в) $a^{20} + a^{15} + a^{10} + a^5$;
г) $b^{60} - b^{40} + b^{20} - 1$;
д) $2x^5 + 4x^4 + 10x + 20$;
е) $3y^7 - 9y^6 - 7y + 21$;
ж) $7a^{10} - 35a^7 - 2a^4 + 10a$;
з) $3b^{15} - 27b^{10} - 2b^6 + 18b$.

710. Разложите на множители выражение:

а) $(2a + b)(5a - b) - 3a(2a + b)$;
б) $(2x + 7y)(2x - y) - 7y(2x - y)$;
в) $2y^2(y + 3) - 4y(y + 3)$;
г) $27x^3(a - 4x) - 18x^2(4x - a)$;
д) $(a + b)(c + d) + c(c + d)$;
е) $(a - b)^2 + c(a - b)$;
ж) $(a - b)^2 + a^2(b - a)$;
з) $(a - b)^3 - c(b - a)^2$.

711. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2y - y^3 + x^2z - y^2z$;
б) $ab^3 + a^3b + a^2cd + b^2cd$;
в) $7a^{20} - a^{15} - 7a^{10} + a^5$;
г) $2a^{15} - 6a^5 - a^{12} + 3a^2$.

712. Представьте многочлен в виде произведения двучлена и трёхчлена:

а) $abx - aby - acy + acx + bcx - bcy$;
б) $a^2x - ab + a^2b - ac + a^2c - ax$;
в) $30a^2x^2 - 15b^2x^2 - 12a^2 + 6b^2 + 5c^2x^2 - 2c^2$;
г) $x^4 + 2x^2y^2 - 10a^2y^2 + 3x^2z^2 - 5a^2x^2 - 15a^2z^2$.

713. Разложите на множители выражение:

а) $a^2 + 13a + 30$;
б) $a^2 + 7a - 30$;
в) $a^2 - 7a - 30$;
г) $b^4 + 11b^2 + 10$;
д) $b^4 - 9b^2 - 10$;
е) $b^4 + 9b^2 - 10$.

714. Вынесите за скобки числовой множитель:

а) $(2x - 4)^2$;
б) $(3y + 9)^2$;
в) $(-5a + 10b)^2$;
г) $(-2c - 6)^2$;
д) $(0,5x + 1)^2$;
е) $\left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\right)^2$.

К параграфу 10

715. Вычислите:

а) $1,7 \cdot 3,2 + 3,2^2 + 4,9 \cdot 6,8$;

б) $0,38^2 + 1,42 \cdot 0,38 + 1,8 \cdot 9,62$;

в) $0,73^2 + 0,27 \cdot 0,73 + 0,27$;

г) $1,6^2 + 0,8 \cdot 1,6 - 2,4 \cdot 2,6$.

716. Найдите значение суммы:

а) $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5$; б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$.

717. Докажите, что:

а) $25^7 - 5^{12}$ кратно 120; в) $10^{12} + 10^{11} + 10^{10}$ кратно 555;

б) $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ кратно 45; г) $3^{20} + 3^{18} - 3^{16}$ кратно 267.

718. Докажите, что при любом натуральном a значение выражения $a^3 + 3a^2 + 2a$ кратно 6.

719. Докажите, что произведение двух последовательных чётных чисел кратно 8.

720. Пусть $\overline{ab}$ — двузначное число, сумма цифр которого меньше 10. Докажите, что число $\overline{acb}$, где $c = a + b$, кратно 11.

721. Докажите тождество:

а) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$;

б) $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 +$
$+ (ab + bc + ca)x + abc$;

в) $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$;

г) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

722. Докажите, что если $b + c = 10$, то

$$(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc.$$

Пользуясь этой формулой, вычислите:

а) $32 \cdot 38$; б) $43 \cdot 47$; в) $66 \cdot 64$; г) $81 \cdot 89$.

723. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то

$$(a + b)(b + c)(c + a) = -abc.$$

724. Решите уравнение:

а) $(2x - 1)(3x - 1)(4x - 1) = 0$;

б) $(2x + 1)(3x^2 + 1)(4x + 1) = 0$;

в) $(x - 8)(x^2 - 7x - 8) = x^3 - 8x^2$;

г) $(2x + 7)(x^2 + 12x - 30) - 5x^2 = 2x^2(x + 1)$.

725. Решите уравнение:

а) $(2x - 1)^2 = x - \frac{1}{2}$;

б) $(3x + 1)^2 = 5\left(x + \frac{1}{3}\right)$;

в) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 2x + 1$;

г) $\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 = 3(7x - 1)$;

д) $x + x^2 = x^3 + x^4$;

е) $x - x^2 = x^3 - x^4$;

ж) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

з) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

726. Первая цифра трёхзначного числа равна 9. Эту цифру переставили на последнее место и получившееся трёхзначное число вычли из данного. В результате получили 576. Найдите данное трёхзначное число.

727. Первая цифра трёхзначного числа равна 7, а его последняя цифра кратна 3. После того как цифры сотен и десятков этого трёхзначного числа переставили, получившееся новое трёхзначное число оказалось меньше данного на 270. Найдите все трёхзначные числа, удовлетворяющие этому условию.

Глава 6 Формулы сокращённого умножения

В этой главе доказываются формулы «быстрого» умножения или возведения в степень двучленов вида $a - b$ и $a + b$. Применение этих тождеств «в обратную сторону» помогает разложить на множители некоторые многочлены, выделить квадрат двучлена в квадратном трёхчлене. Использование этих формул позволяет решать большое количество новых и интересных задач.

§ 11. Разность квадратов

24. Умножение разности двух выражений на их сумму

В некоторых часто встречающихся на практике случаях умножение многочлена на многочлен выполняют короче: по *формулам сокращённого умножения*.

Умножим разность a и b на их сумму. Применяя правило умножения многочлена на многочлен, получим

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Значит,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2. \qquad (1)$$

Это тождество является одной из формул сокращённого умножения.

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

Пример 1. Найдём произведение разности $8u - 5v$ и суммы $8u + 5v$. Применяя формулу сокращённого умножения (1), получим:

$$(8u - 5v)(8u + 5v) = (8u)^2 - (5v)^2 = 64u^2 - 25v^2.$$

Пример 2. Умножим разность $x^2 - 2y^3$ на сумму $x^2 + 2y^3$. По формуле (1) находим:

$$(x^2 - 2y^3)(x^2 + 2y^3) = (x^2)^2 - (2y^3)^2 = x^4 - 4y^6.$$

Пример 3. Представим в виде многочлена выражение

$$-3{,}5m^2 - (1{,}5n - 2m)(1{,}5n + 2m).$$

Используя формулу (1), получим

$$-3{,}5m^2 - (1{,}5n - 2m)(1{,}5n + 2m) =$$
$$= -3{,}5m^2 - (2{,}25n^2 - 4m^2) =$$
$$= -3{,}5m^2 - 2{,}25n^2 + 4m^2 = 0{,}5m^2 - 2{,}25n^2.$$

Упражнения

728. Выполните умножение:

а) $(b - c)(b + c)$; д) $(2x - 1)(2x + 1)$;
б) $(a - x)(x + a)$; е) $(m - 5k)(5k + m)$;
в) $(y + 4)(y - 4)$; ж) $(1 + 3p)(3p - 1)$;
г) $(1 + p)(p - 1)$; з) $(4y + m)(m - 4y)$.

729. Примените формулу сокращённого умножения:

а) $(2m - 0{,}5)(0{,}5 + 2m)$; в) $(1{,}1x - 0{,}9)(1{,}1x + 0{,}9)$;
б) $\left(\frac{2}{3} + 4p\right)\left(4p - \frac{2}{3}\right)$; г) $\left(\frac{3}{4}y + 2{,}5\right)\left(\frac{3}{4}y - 2{,}5\right)$.

730. Представьте в виде многочлена произведение:

а) $(3m - 2k)(3m + 2k)$; г) $(4x - 5y)(5y + 4x)$;
б) $(6p + 5q)(6p - 5q)$; д) $(2a + 9b)(2a - 9b)$;
в) $(10a - 3b)(3b + 10a)$; е) $(3p + 8k)(8k - 3p)$.

731. Выполните умножение:

а) $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$; г) $(1{,}2c^2 + d)(d - 1{,}2c^2)$;
б) $(x^2 + m)(m - x^2)$; д) $(5x^2 - 0{,}4y^2)(0{,}4y^2 + 5x^2)$;
в) $(m^2 - p^3)(m^2 + p^3)$; е) $(2{,}5a^3 - 3b^4)(2{,}5a^3 + 3b^4)$.

732. Примените формулу сокращённого умножения:

а) $(2x^2 + 3y)(-2x^2 + 3y)$; в) $(-2x^3 + 5a^2)(-5a^2 - 2x^3)$;
б) $(-5n + 3p^2)(5n + 3p^2)$; г) $(-4m^4 - 3n^2)(-4m^4 + 3n^2)$.

733. Найдите значение выражения:

а) $(20 - 3)(20 + 3)$; в) $102 \cdot 98$; д) $4\frac{3}{4} \cdot 5\frac{1}{4}$;
б) $\left(10 + \frac{1}{2}\right)\left(10 - \frac{1}{2}\right)$; г) $8{,}6 \cdot 7{,}4$; е) $2{,}7 \cdot 3{,}3$.

734. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(2a^2b - 3xy^2)(2a^2b + 3xy^2)$; в) $(0{,}6p^2q - 1{,}1mn^2)(1{,}1mn^2 + 0{,}6p^2q)$;
б) $\left(\frac{1}{2}mn^3 + \frac{1}{3}p^2\right)\left(\frac{1}{3}p^2 - \frac{1}{2}mn^3\right)$; г) $\left(\frac{2}{3}ax^3 + 0{,}8b^2y\right)\left(0{,}8b^2y - \frac{2}{3}ax^3\right)$.

735. Выполните умножение:

а) $(x^n - y^n)(x^n + y^n)$; в) $(m^{3n} - p^k)(p^k + m^{3n})$;

б) $(2^k + 3^k)(3^k - 2^k)$; г) $(5^{2k} - 4^{3m})(4^{3m} + 5^{2k})$.

736. Примените формулу сокращённого умножения:

а) $(x^{k+1} - y^{k-1})(x^{k+1} + y^{k-1})$;

б) $(a^{2n-3} + b^{2m+1})(a^{2n-3} - b^{2m+1})$;

в) $(2x^{4n+5} - 5y^{4n-5})(2x^{4n+5} + 5y^{4n-5})$;

г) $(3p^{3m-2} + 2q^{2n-3})(3p^{3m-2} - 2q^{2n-3})$.

737. Выполните умножение:

а) $3(4 - m)(4 + m)$;

б) $-5(x + y)(y - x)$;

в) $2m(3a - 5)(3a + 5)$;

г) $-10y(2y + 3z)(3z - 2y)$;

д) $0{,}5b(4a - 6b^2)(6b^2 + 4a)$;

е) $-10x(0{,}8y + 0{,}5x^2)(0{,}5x^2 - 0{,}8y)$.

738. Представьте в виде многочлена:

а) $4p(p - c)(c + p)$; в) $0{,}2m(4m - k^2)(k^2 + 4m)$;

б) $-3c(2k + 3c)(3c - 2k)$; г) $-\frac{1}{3}(3x^3 + y)(y - 3x^3)$.

739. Выполните умножение:

а) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$;

б) $(a + 3)(3 - a)(9 + a^2)$;

в) $(5 + m)(m^2 + 25)(m - 5)$;

г) $(1 + 4p^2)(2p + 1)(1 - 2p)$.

740. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(2m + 5)(5 - 2m) + 3m^2$;

б) $10 - (4p + 1)(4p - 1)$;

в) $3m^2 - (2 - 5m)(5m + 2)$;

г) $(2 + 3x)(3x - 2) - 9x^2$;

д) $(5 - 4a)(5 + 4a) - 25$;

е) $-10a^4 + (3a^2 - 2b)(2b + 3a^2)$.

741. Упростите выражение:

а) $(m + 3)(m - 3) - m(m + 1)$;

б) $4n(n + 4) - (4 - n)(4 + n)$;

в) $(5a + b)(b - 5a) + 25a(a - b)$;

г) $-2x(2x - m) + (2x - 3m)(2x + 3m)$.

742. Выполните действия:

а) $10x^2 - (4x - 1)(1 + 4x)$; в) $(3m - k)(3m + k) - 2m(5m - k)$;

б) $-(7a + 2)(2 - 7a) + 4$; г) $5d(4c + 5d) - (2c + 5d)(5d - 2c)$.

743. Представьте в виде многочлена:

а) $(10x + 3y)(3y - 10x) - (7x - 8y)(7x + 8y)$;

б) $(9m - 10k)(10k + 9m) + (9k + 8m)(9k - 8m)$.

744. Решите уравнение:

а) $(2y - 1)(2y + 1) - y(4y + 3) + 5y = 0$;

б) $9m + 8m(5 - 2m) = 9m^2 - (5m + 7)(5m - 7)$;

в) $4x(x - 1) - 8 = (1 + 2x)(2x - 1) - 6x$;

г) $-5y + (3y + 4)(3y - 4) = (4y - 3)(3 + 4y) - 7y^2$.

Упражнения для повторения

745. Запишите выражение:

а) произведение суммы выражений $2x$ и y и их разности;

б) произведение разности выражений a и $5b$ и их суммы;

в) квадрат разности $3m$ и n;

г) разность квадратов $3m$ и n.

746. Прочитайте выражение:

а) $(5x - m)(5x + m)$; в) $m^2 - n^2$;

б) $(1 + 3k)(1 - 3k)$; г) $(m - n)^2$.

747. Найдите корни уравнения:

а) $3m^2 - 11m = 0$; в) $-2(x + 5) = 7x^2 - 10$;

б) $6p = -7p^2$; г) $4(n^2 - 9) = 3(n - 12)$.

748. Представьте в виде квадрата одночлена выражение:

а) $4a^2$; б) $\frac{1}{9}x^2$; в) $0{,}25y^4$; г) $1\frac{13}{36}m^6$.

749. Докажите тождество:

а) $m(x + y) + y(x - m) = x(m + y)$;

б) $(a - b)(a + b) - a(a - b) = b(a - b)$.

750. Решите уравнение:

а) $x - \frac{3x+1}{3} = 3 - \frac{5x}{2}$; б) $\frac{4y-2}{5} \cdot 1{,}5 = 2y - 2{,}6$.

751. Двигаясь со скоростью 15 км/ч, велосипедист приехал на станцию за 10 мин до отправления автобуса. Если бы он ехал со скоростью 12 км/ч, то опоздал бы к отправлению этого автобуса на 5 мин. Какое расстояние проехал велосипедист?

25. Разложение на множители разности квадратов

В тождестве $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поменяем местами левую и правую части. Получим тождество

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \qquad (1)$$

которое называется *формулой разности квадратов*.

Тождество (1) применяют для разложения на множители разности квадратов двух выражений.

Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Пример 1. Разложим на множители выражение

$$x^2 - 25.$$

Представим выражение $x^2 - 25$ в виде разности квадратов и воспользуемся формулой (1). Получим:

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5).$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$64m^2 - 9n^2.$$

Представим выражение $64m^2 - 9n^2$ в виде разности квадратов и затем применим формулу (1). Будем иметь

$$64m^2 - 9n^2 = (8m)^2 - (3n)^2 = (8m - 3n)(8m + 3n).$$

Упражнения

752. Разложите на множители многочлен:

а) $m^2 - n^2$; в) $900 - p^2$; д) $x^2 - 1{,}21$;

б) $a^2 - 4$; г) $k^2 - 625$; е) $1\frac{9}{16} - n^2$.

753. На рисунке 10 изображён квадрат со стороной a, из которого вырезан квадрат со стороной b. Используя этот рисунок, разъясните геометрический смысл формулы

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

при $a > 0$, $b > 0$ и $a > b$.

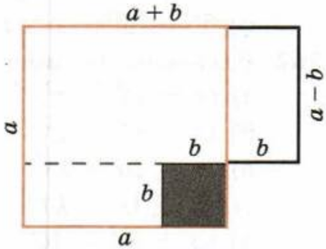


Рис. 10

754. Представьте в виде произведения многочлен:

а) $x^2 - 9y^2$; д) $25x^2 - 49y^2$;

б) $49m^2 - n^2$; е) $0{,}36m^2 - 25n^2$;

в) $0{,}64 - 4k^2$; ж) $0{,}81x^2 - 1{,}21y^2$;

г) $2\frac{1}{4}p^2 - x^2$; з) $\frac{9}{16}p^2 - 1\frac{9}{16}k^2$.

755. Разложите на множители:

а) $x^2y^2 - 16$; б) $36 - a^2b^2$; в) $m^2n^2 - 0{,}09$; г) $\frac{16}{25} - k^2p^2$; д) $0{,}81p^2 - 4a^2b^2$; е) $9m^2n^2 - 0{,}01p^2$; ж) $0{,}04k^2 - 0{,}09a^2n^2$; з) $\frac{1}{9}a^2b^2 - 2\frac{7}{9}m^2p^2$.

756. Найдите значение выражения:

а) $61^2 - 39^2$; б) $45^2 - 55^2$; в) $13{,}6^2 - 3{,}6^2$; г) $5{,}8^2 - 94{,}2^2$; д) $\left(1\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2$; е) $\left(3\frac{5}{8}\right)^2 - \left(1\frac{3}{8}\right)^2$.

757. Найдите значение дроби:

а) $\frac{24^2 - 12^2}{18^2 - 6^2}$; б) $\frac{32^2 - 17^2}{70^2 - 35^2}$; в) $\frac{7{,}4^2 - 2{,}6^2}{11{,}2^2 - 8{,}8^2}$.

758. Решите уравнение:

а) $x^2 - 25 = 0$; б) $36 - m^2 = 0$; в) $2\frac{1}{4} + n^2 = 0$; г) $0{,}36 - 0{,}81m^2 = 0$; д) $6{,}25x^2 - 100 = 0$; е) $11\frac{1}{9} - \frac{1}{4}x^2 = 0$.

759. Разложите на множители многочлен:

а) $m^4 - 4$; б) $16 - p^6$; в) $a^6 - b^4$; г) $x^{10} - y^8$; д) $49m^4 - 25$; е) $4 - 81p^6$; ж) $36a^4 - b^6$; з) $16m^4 - 121n^4$; и) $0{,}01m^2 - 25n^8$; к) $100x^4 - 9y^{10}$; л) $9a^2b^2 - 4x^4$; м) $36m^6 - 49k^4n^2$.

760. Представьте в виде произведения:

а) $x^6 - 1{,}44$; б) $\frac{1}{4}m^2 - n^4$; в) $1{,}21p^2 - a^6$; г) $\frac{1}{9}y^6 - 4a^4$; д) $0{,}04a^6 - 0{,}25b^4$; е) $2\frac{1}{4}m^4 - 64n^4k^2$.

761. Представьте в виде произведения:

а) $x^{2n} - y^{4k}$; б) $5^{4p} - 3^{2n}$; в) $a^{6n+4} - b^{4n+2}$; г) $y^{4-2k} - x^{6m-2}$; д) $4x^{2n-6} - 9y^{2n+6}$; е) $0{,}49a^{6-2p} - 0{,}81b^{4p+2}$.

762. Разложите на множители:

а) $(x + y)^2 - z^2$; б) $(x - y)^2 - z^2$; в) $m^2 - (n + k)^2$; г) $m^2 - (n - k)^2$; д) $(a + 4)^2 - 16$; е) $100 - (10 - n)^2$; ж) $(3a + 1)^2 - 4$; з) $9 - (2 - 5b)^2$; и) $4x^2 - (1 - 3x)^2$; к) $(2m + 3)^2 - 9m^2$; л) $16a^2 - (3a - 1)^2$; м) $25m^2 - (2x + 3m)^2$.

763. Представьте в виде произведения:

а) $81 - 4(p + 3)^2$; г) $4y^2 - 9(5y - 1)^2$;

б) $9(4 - x)^2 - 16$; д) $9a^2 - 16(4a - 3)^2$;

в) $16(2x + 1)^2 - \frac{4}{9}$; е) $25(5m + n)^2 - 4n^2$.

764. Найдите корни уравнения:

а) $(2x - 1)^2 - 3^2 = 0$; в) $(2 - 3x)^2 - 1 = 0$;

б) $(x + 2)^2 - 25 = 0$; г) $16 - (x - 3)^2 = 0$.

765. Разложите на множители:

а) $(x + y)^2 - (x - y)^2$;

б) $(2m - n)^2 - (m + 2n)^2$;

в) $(3n + 2p)^2 - (5p - 2n)^2$;

г) $4(3x - 2y)^2 - 9(4x + 3y)^2$;

д) $100(6a + 3b)^2 - 81(3a + 2b)^2$;

е) $49(5x^2 + 8)^2 - 36(4x^2 - 1)^2$.

766. Что можно сказать о числах m и n, если известно, что $m^2 = n^2$?

767. Решите уравнение:

а) $(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 0$;

б) $(4x + 3)^2 - (3x - 1)^2 = 0$;

в) $(2 - x)^2 - 4(3x + 1)^2 = 0$;

г) $(5 - 2x)^2 - 9(x + 1)^2 = 0$.

768. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения:

а) $(3n - 4)^2 - n^2$ кратно 8; б) $(n + 9)^2 - (n - 7)^2$ кратно 32.

769. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечётных чисел кратна 8.

770. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(n + 1)^2 - n^2$ есть нечётное число.

В школе Пифагора (VI в. до н. э.) эту задачу решали «на камушках» с помощью «квадратных» чисел. Это решение легко увидеть на рисунке 11.

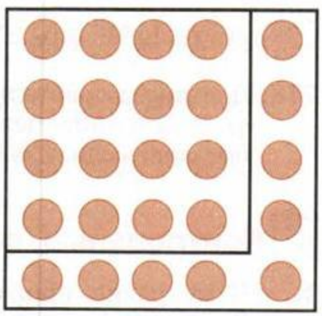


Рис. 11

771. Сторона одного квадрата на 2 см меньше стороны другого квадрата, а разность площадей этих квадратов равна 24 см^2. Найдите сторону большего квадрата.

772. Найдите ошибку в рассуждениях, приводящих к выводу: любое число равно своему удвоенному значению.

Пусть дано произвольное число n. Запишем для него верное равенство

$$n^2 - n^2 = n^2 - n^2.$$

Вынесем в левой части за скобку множитель n, а правую часть разложим на множители по формуле разности квадратов, получим равенство

$$n(n - n) = (n - n)(n + n).$$

Сократив обе части равенства на одинаковый множитель $(n - n)$, получим $n = n + n$, т. е. $n = 2n$.

Упражнения для повторения

773. Представьте в виде квадрата одночлена выражение:

а) $9m^2$; в) $0{,}81a^2$; д) $49p^6$; ж) a^2b^4;

б) $25n^4$; г) $0{,}16b^4$; е) $0{,}64m^6$; з) $16a^4b^6$.

774. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $4x^2 - (2x + 1)(1 - 2x)$; в) $3m^2 + (4m - 3p)(4m + 3p)$;

б) $(7 - 3a)(3a + 7) + 10a^2$; г) $(2a + 5b)(5b - 2a) - 20b^2$.

775. Докажите тождество:

а) $a^2 - b^2 - (a + b)^2 = -2b(a + b)$;

б) $(a - b)^2 - (a^2 - b^2) = -2b(a - b)$.

776. Разложите на множители многочлен:

а) $m^3 + 3m^2n - 2mn - 6n^2$;

б) $-2a^3 + 4a^2b^2 + ab - 2b^3$.

777. Решите уравнение:

а) $9 - \frac{z}{6} = 2z + \frac{3z+1}{4}$; в) $\frac{x}{2} - \frac{2x-1}{6} = \frac{x+1}{4}$;

б) $2 - \frac{1-5m}{3} = 3m - \frac{m}{2}$; г) $\frac{5k+3}{10} - \frac{k-2}{15} = -13$.

778. Два поезда двигались навстречу друг другу. Через 0,5 ч после встречи расстояние между ними стало равным 60 км. Найдите скорости поездов, если у одного из них скорость на 20 км/ч больше.

? Контрольные вопросы и задания

1. Чему равно произведение разности двух выражений и их суммы? Запишите ответ в виде формулы и докажите её.
2. Чему равна разность квадратов двух выражений? Приведите пример.

§ 12. Квадрат суммы и квадрат разности

26. Возведение в квадрат суммы и разности

Представим в виде многочлена квадрат суммы a и b. Для этого степень $(a + b)^2$ запишем в виде произведения и применим правило умножения многочлена на многочлен:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Значит,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \qquad (1)$$

Полученное тождество является ещё одной формулой сокращённого умножения. Её называют *формулой квадрата суммы двух выражений*.

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения, плюс удвоенное произведение первого и второго выражений, плюс квадрат второго выражения.

Пример 1. Представим выражение $(5 + 3x)^2$ в виде многочлена. Применяя формулу (1), получим

$$(5 + 3x)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3x + (3x)^2 = 25 + 30x + 9x^2.$$

Пример 2. Возведём в квадрат сумму $-2a + 1$.

Выражение $(-2a + 1)^2$ является квадратом суммы выражений $-2a$ и 1. Используя формулу (1), найдём

$$(-2a + 1)^2 = (-2a)^2 + 2 \cdot (-2a) \cdot 1 + 1^2 = 4a^2 - 4a + 1.$$

Возведём в квадрат разность a и b. Представив степень $(a - b)^2$ в виде произведения и выполнив умножение, получим

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Значит,

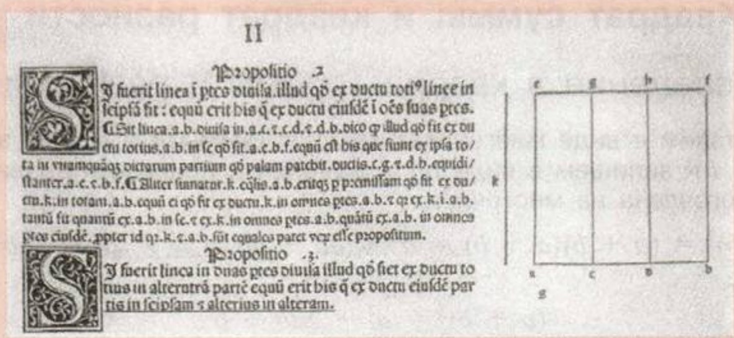
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \qquad (2)$$

Полученное тождество позволяет быстрее возводить в квадрат разность двух выражений. Его называют *формулой квадрата разности двух выражений*.

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения, минус удвоенное произведение первого и второго выражений, плюс квадрат второго выражения.

Формулу (2) можно получить из формулы (1), представив разность a и b в виде суммы a и $-b$:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$



II

Propositio 2

S

I fuerit linea i ptes diuisa: illud qd ex ductu toti' linee in seipsā fit: equū erit his q ex ductu eiusdē i oēs suas ptes. Sit linea.a.b. diuisa in .a.c.c.d.d.b. dico q illud qd fit ex ductu totius.a.b. in se qd fit.a.e.b.f. equū est his que fiunt ex ipsa tota in vnamquāqz dictarum partium qd palam patebit. ductis.c.g.d.h. equidistanter.a.e.c.b.f. Aliter sumatur.k. eqlis.a.b. eritqz p premissam qd fit ex ductu.k. in totam.a.b. equū ei qd fit ex ductu.k. in omnes ptes.a.b.z qz ex.k.i.a.b. tantū fit quantū ex.a.b. in se.z ex.k. in omnes ptes.a.b. quātū ex.a.b. in omnes ptes eiusdē, ppter id qz.k.z.a.b. sūt equales patet vez esse propositum.

Propositio 3.

S

I fuerit linea in duas ptes diuisa illud qd fiet ex ductu totius in alterutrā partē equū erit his q ex ductu eiusdē partis in seipsam z alterius in alteram.

Фрагмент страницы из II книги Евклида «Начала» III в. до н. э. с геометрическим доказательством тождеств квадрата суммы и квадрата разности.

Пример 3. Возведём в квадрат разность $4m - 3$.

Применяя формулу (2) к степени $(4m - 3)^2$, получим

$$(4m - 3)^2 = (4m)^2 - 2 \cdot 4m \cdot 3 + 3^2 = 16m^2 - 24m + 9.$$

Пример 4. Представим в виде многочлена выражение

$$4x(x - y) - (2x - y)^2.$$

Выполнив действия, получим

$$4x(x - y) - (2x - y)^2 =$$
$$= 4x^2 - 4xy - (4x^2 - 4xy + y^2) =$$
$$= 4x^2 - 4xy - 4x^2 + 4xy - y^2 = -y^2.$$

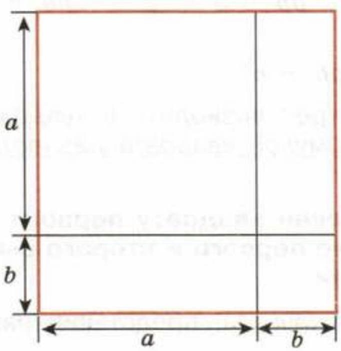


Рис. 12

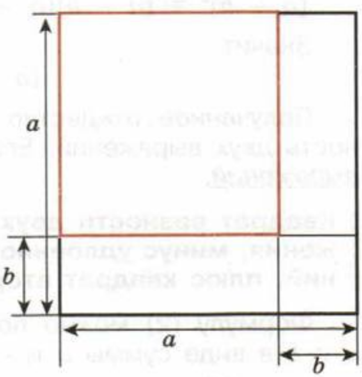


Рис. 13

Упражнения

779. Формулы квадрата суммы и квадрата разности доказаны во II книге Евклида «Начала». Разъясните геометрический смысл формулы:

а) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, где $a > 0$, $b > 0$, используя рисунок 12;

б) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, где $a > b > 0$, используя рисунок 13.

780. Представьте в виде многочлена:

а) $(3 + p)^2$; в) $(0{,}4 + d)^2$; д) $(-x + y)^2$;

б) $(c - 2)^2$; г) $(k - 0{,}5)^2$; е) $(-m - n)^2$.

781. Какие из выражений

$$(-m - n)^2,\quad (-m + n)^2,\quad (n - m)^2 \text{ и } (-n - m)^2$$

тождественно равны выражению:

а) $(m - n)^2$; б) $(m + n)^2$?

782. Используя формулу квадрата суммы или квадрата разности, найдите значение выражения:

а) $(40 + 1)^2$; в) 101^2; д) 48^2; ж) $3{,}5^2$;

б) $(30 - 1)^2$; г) 99^2; е) 52^2; з) $10{,}1^2$.

783. Найдите значение выражения:

а) 23^2; в) 81^2; д) $1{,}3^2$; ж) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2$;

б) 19^2; г) 49^2; е) $1{,}9^2$; з) $\left(4\frac{3}{4}\right)^2$.

784. Сравните с единицей число:

а) $\dfrac{79^2 + 85^2}{(79 + 85)^2}$;

б) $\dfrac{194^2 + 103^2}{(194 - 103)^2}$.

785. Представьте в виде многочлена:

а) $(3y + 2)^2$; д) $(3x - 2y)^2$;

б) $(3 - 2y)^2$; е) $(5a + 4b)^2$;

в) $(6m - 5)^2$; ж) $(6m + 5k)^2$;

г) $(4k + 3)^2$; з) $(3p - 4c)^2$.

786. Преобразуйте в многочлен:

а) $(2a + 7b)^2$; в) $\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)^2$; д) $\left(\frac{3}{4}m - 3n\right)^2$;

б) $(3a - 5b)^2$; г) $(2x - 0{,}2y)^2$; е) $\left(4m - 1\frac{1}{2}n\right)^2$.

787. Преобразуйте в многочлен:

а) $(4m^2 + 5n)^2$; в) $(2x^2 + 5y^2)^2$; д) $\left(\frac{1}{4}x^2 - 4y^3\right)^2$;

б) $(3c - 2p^3)^2$; г) $(7y^3 - 3p^2)^2$; е) $\left(\frac{2}{5}a^4 + \frac{1}{2}a^3\right)^2$.

788. Представьте в виде многочлена:

а) $(3 + 5x)^2 - 9$;
б) $25 - (4m - 5)^2$;
в) $9p^2 - (4 + 3p)^2$;
г) $(-7k + 1)^2 + 14k$;
д) $40c^2 - (1 - 6c)^2 + 1$;
е) $(8 + 7y)^2 - 49y^2 - 60$.

789. Выполните действия:

а) $\frac{1}{2}(10m - 1)^2 - 20m$; в) $0{,}5\left(2p + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}p$;

б) $24k - \frac{2}{3}(3k + 4)^2$; г) $3c + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}c - 2\right)^2$.

790. Докажите, что разность между квадратом числа, которое не делится на 3, и единицей делится на 3.

791. Раскройте скобки:

а) $(2x^n + y^k)^2$; б) $\left(\frac{1}{2}a^{2n+1} - 2b^{2n-1}\right)^2$.

792. Упростите выражение:

а) $4(m - 1) - (2m + 1)^2$; д) $(p + 6)(6 - p) + (p + 2)^2$;
б) $(1 - 3c)^2 + 3(2c + 1)$; е) $(c - 4)^2 - (c - 10)(c + 10)$;
в) $k(2 - 5k) - (2 - 3k)^2$; ж) $(x + 3)(x - 3) - (x + 5)^2$;
г) $(7x + 4)^2 - 4x(5 - 2x)$; з) $(1 - 2y)^2 - (2y - 3)(2y + 3)$.

793. Докажите тождество:

$$x(y + z)^2 + y(z + x)^2 + z(x + y)^2 - 4xyz = \\ = (x + y)(y + z)(z + x).$$

794. Найдите значение выражения:

а) $(2x - 3)(2x + 3) - (2x - 1)^2$ при $x = 2{,}25$;
б) $(3a - 4)^2 + (3 + 4a)^2$ при $a = -7$;
в) $2y(8y + 1) - (4y - 1)^2$ при $y = 1{,}8$;
г) $(3a + 2)^2 + 6(3 - 2a)$ при $a = -3$;
д) $(4x + 3)(4x - 3) - (4x + 5)^2$ при $x = -0{,}5$;
е) $(5p - 2)^2 + (3p - 2)(3p + 2)$ при $p = -0{,}1$.

795. Решите уравнение:

а) $(7 - x)^2 - (x + 8)(x - 8) = 43$;
б) $(3m + 4)(3m - 4) - (3m + 5)^2 = -11$;
в) $(6x + 1)^2 - (6x - 1)^2 = 0$;
г) $(4 - 5p)^2 = (3 - 5p)^2 - 3$;
д) $4x(4x - 8) - (4x + 7)^2 = 39$;
е) $(6 - 5m)^2 - 10m(2{,}5m + 1) = 8$;
ж) $(2a - 5)^2 - (2a + 3)^2 = -80$;
з) $32 + (2k + 1)^2 = (2k - 3)^2$.

796. Докажите, что если x и y не кратны 3, то разность $x^2 - y^2$ кратна 3.

797. При каком значении m:

а) квадрат суммы выражений m и 1 на 32 меньше квадрата их разности;
б) квадрат суммы $m + 5$ на 8 больше квадрата разности $m - 3$?

798. Отрезок длиной 20 см разделён на две части, и на каждой из них построен квадрат (рис. 14). Найдите стороны квадратов, если разность их площадей равна 40 см^2.

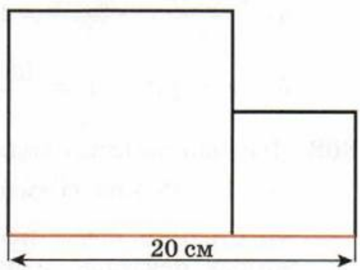


Рис. 14

799. Если сторону квадрата увеличить на 4 см, то его площадь увеличится на 32 см^2. Найдите сторону данного квадрата.

800. Докажите тождество:

а) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;
б) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

801. Представьте в виде многочлена:

а) $5(2 - 3y^2)^2 - 15y^4$;
б) $-4x(1 + 2x^3)^2 + 15x^4$;
в) $4np^3 + 2p(n - 2p^2)^2$;
г) $40z^2 - (3 + 5z^2)^2 + 10$.

802. Преобразуйте в многочлен:

а) $(x - y)^2(x + y)$;
б) $(x - y)(x + y)^2$;
в) $(1 - 5n)(4m + 3)^2$;
г) $(2a + 4)^2(2a - 4)$;
д) $(c - 3m)^2(3m + c)^2$;
е) $(a + 2b)^2(2a - b)^2$.

803. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(a + b - 2)(a + b + 2)$;
б) $(x - y - 3)(x - y + 3)$;
в) $(a + c - 5)(a - c + 5)$;
г) $(x - a + 8)(x + a - 8)$.

804. Докажите, что при любом натуральном значении n:

а) значение выражения $(3n - 1)^2 - 1$ кратно 3;

б) значение выражения $(n + 5)^2 - n^2$ кратно 5.

Упражнения для повторения

805. Разложите на множители:

а) $16m^2 - 25n^4$; в) $(2a + 3)^2 - 4$;

б) $0{,}09a^4 - 9b^2$; г) $36 - (1 - 5x)^2$.

806. Представьте в виде многочлена:

а) $(3x + 11y)(11y - 3x)$; в) $(5a^2 + 1)(5a^2 + 2)$;

б) $(6x - 1)(1 - 6x)$; г) $(4x^2 - 3)(4x^2 + 3)$.

807. Решите уравнение:

а) $\frac{(2a+1)^2}{4} - \frac{(3a-2)^2}{9} = 1$;

б) $(x + 5)^2 + 1 = \frac{(6x-1)^2}{36}$.

808. Две машинистки должны напечатать отчёт объёмом 60 страниц. Через 1 ч 15 мин совместной работы они напечатали $\frac{2}{3}$ отчёта. Сколько страниц в час печатала первая машинистка, если известно, что вторая печатала за час на 2 страницы больше (производительность труда машинисток считаем постоянной)?

809. Два слесаря за 2 ч совместной работы выточили 46 деталей. Какова производительность труда каждого рабочего, если первый вытачивает за час на 1 деталь больше?

27. Разложение на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности

Возьмём формулы квадрата суммы и квадрата разности. В каждой из них поменяем местами левую и правую части. Получим новые формулы:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Они показывают, как трёхчлены вида $a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$ представить в виде квадратов двучленов, т. е. разложить на два одинаковых множителя.

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$x^2 + 6x + 9.$$

Первое слагаемое является квадратом x, третье — квадратом числа 3, второе — удвоенным произведением x и 3, т. е.

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2.$$

Поэтому

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$25m^2 - 40m + 16.$$

Первое слагаемое представляет собой квадрат выражения $5m$, третье — квадрат числа 4, а второе — удвоенное произведение $5m$ и 4 со знаком «минус». Следовательно,

$$25m^2 - 40m + 16 = (5m)^2 - 2 \cdot 5m \cdot 4 + 4^2 = (5m - 4)^2.$$

Упражнения

810. Представьте в виде квадрата двучлена трёхчлен:

а) $c^2 + 10c + 25$;

б) $m^2 - 16m + 64$;

в) $4 - 4x + x^2$;

г) $36 - 12a + a^2$;

д) $p^2 + 36 - 12p$;

е) $81 + m^2 + 18m$.

811. Разложите на множители многочлен:

а) $100m^2 - 100m + 25$;

б) $16 + 24x + 9x^2$;

в) $1 - 12p + 36p^2$;

г) $49a^2 + 42ab + 9b^2$;

д) $16x^2 + 81y^2 - 72xy$;

е) $44bc + 121b^2 + 4c^2$;

ж) $4x^2 + 12xy + 9y^2$;

з) $25a^2 - 20ab + 4b^2$.

812. Найдите значения выражений:

а) $x^2 + 4x + 4$ при $x = -12; 98; -1{,}8$;

б) $y^2 - 10y + 25$ при $y = 15; -15; 4\frac{3}{4}$;

в) $9m^2 - 6m + 1$ при $m = -3; 7; \frac{2}{3}$;

г) $40c + 16 + 25c^2$ при $c = 0{,}6; 1{,}2; -1{,}2$.

813. Докажите, что при любом значении x верно неравенство:

а) $x^2 - 22x + 121 \geqslant 0$;

б) $-1 + 4x - 4x^2 \leqslant 0$.

814. Подставьте вместо переменных x и y такие одночлены, чтобы получилось тождество:

а) $(2a - x)^2 = 4a^2 - y + 9b^2$;

б) $y - 10ab + 25b^2 = (a + x)^2$.

815. Измените один из коэффициентов квадратного трёхчлена $4x^2 - 6x + 9$ так, чтобы его можно было представить в виде квадрата двучлена. Сколько решений имеет задача?

816. Решите уравнение:

а) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; г) $0{,}5n^2 - 3n + 4{,}5 = 0$;

б) $9y^2 - 12y + 4 = 0$; д) $25x^2 - 20x + 4 = 0$;

в) $\frac{1}{8}m^2 + m + 2 = 0$; е) $\frac{1}{3}p^2 + 2p + 3 = 0$.

817. Найдите множество корней уравнения:

а) $4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 6x + 9$;

б) $9x^2 + 6x + 1 = x^2 - 4x + 4$;

в) $4x^2 + 4x + 1 = 9x^2 - 12x + 4$;

г) $4 - 4x + x^2 = 25x^2 + 10x + 1$.

818. Представьте в виде квадрата двучлена выражение:

а) $\frac{1}{9}m^2 - 4m + 36$; в) $9p^2 - 2p + \frac{1}{9}$;

б) $\frac{1}{4}x^2 + 4x + 16$; г) $36 + 8k + \frac{4}{9}k^2$.

819. Разложите на множители выражение:

а) $4x^4 - 12x^2 + 9$; д) $1 - 6c^2 + 9c^4$;

б) $49a^2 + 28ab^2 + 4b^4$; е) $9x^6 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{16}$;

в) $16 - 8ab + a^2b^2$; ж) $9 + 6a^2b + a^4b^2$;

г) $m^4 + 2m^2n^3 + n^6$; з) $x^2 - 6axy^2 + 9a^2y^4$.

820. Докажите, что если $x + y = 5$, то значение выражения

$$x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y - 9$$

равно 1.

821. Докажите, что если $a + b = 0$, то значение многочлена

$$a^2 + 6ab + 5b^2 + 1$$

равно 1.

822. Докажите, что уравнение $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = 0$ не имеет отрицательных корней.

823. Найдите ошибку в рассуждениях.

Рассмотрим верное равенство $1 - 3 = 4 - 6$. Прибавив к обеим частям равенства число $\frac{9}{4}$, получим

$$1 - 3 + \frac{9}{4} = 4 - 6 + \frac{9}{4}.$$

Легко видеть, что правая и левая части являются полными квадратами, т. е.

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \left(2 - \frac{3}{2}\right) \quad \text{и} \quad 1 = 2.$$

824. Длина прямоугольника равна 12 см. Его площадь на 36 см^2 больше площади квадрата со стороной, равной ширине прямоугольника. Найдите сторону квадрата.

Упражнения для повторения

825. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(10p - 7)^2$; в) $(2m - 11k)^2$;

б) $(6 + 5k)^2$; г) $(3c + 4d)^2$.

826. Решите уравнение:

а) $(2x - 9)^2 = (2x - 3)(2x + 3)$;

б) $(5y - 2)^2 - (5y + 3)^2 = 5$.

827. Упростите выражение:

а) $(12m - 1)(3m + 2) - (6m + 1)^2$;

б) $(4a + 3)^2 + (3a + 2)(4a + 1)$.

828. Найдите значение выражения:

а) $(5x - 7y)^2 - (7x - 5y)^2$ при $x = 2$ и $y = -1$;

б) $(4x + 3y)^2 - (3x + 4y)^2$ при $x = -3{,}5$ и $y = 1{,}5$.

829. Разложите на множители:

а) $100m^4 - n^2$; в) $a^4 - b^4$;

б) $81x^2 - 4y^6$; г) $4a^4 - 9b^4$.

830. Расстояние между поездами, идущими навстречу друг другу, равно 300 км. Через 1,5 ч оно сократилось до 90 км. Найдите скорости поездов, если у одного из них скорость в $1\frac{1}{3}$ раза больше.

28. Квадратный трёхчлен

Каждый из многочленов

$$5x^2 - 3x + 7, \quad -2x^2 + 6x - 1 \quad \text{и} \quad 4x^2 - 3$$

является многочленом второй степени вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — числа. В первом из них $a = 5$, $b = -3$ и $c = 7$, во втором $a = -2$, $b = 6$ и $c = -1$, в третьем $a = 4$, $b = 0$ и $c = -3$. Такие многочлены называют *квадратными трёхчленами*.

> **Определение. Квадратным трёхчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — числа, причём $a \neq 0$.**

Числа a, b, c называются коэффициентами квадратного трёхчлена, при этом коэффициент a перед x^2 называется *старшим коэффициентом*, а число c — *свободным членом* квадратного трёхчлена. Заметим, что $a \neq 0$, а другие коэффициенты могут быть равны нулю. Так, выражение $3x^2 + 2x$, содержащее только два слагаемых, является квадратным трёхчленом, поскольку его можно записать в виде $3x^2 + 2x + 0$.

С квадратными трёхчленами мы встречались при разложении многочленов на множители по формулам сокращённого умножения. Так, при разложении на множители квадратного трёхчлена $x^2 + 6x + 9$ получается квадрат суммы x и 3:

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$$

Не всякий квадратный трёхчлен можно представить в виде квадрата суммы или квадрата разности. Однако любой квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, в котором $a = 1$, можно записать в виде суммы квадрата двучлена и некоторого числа или, как говорят, выделить из такого квадратного трёхчлена квадрат двучлена.

Пример 1. Из квадратного трёхчлена $x^2 - 8x + 19$ выделим квадрат разности двух выражений.

Слагаемое x^2 будем считать квадратом первого выражения x. Слагаемое $-8x$ представим в виде удвоенного произведения первого и второго выражений со знаком «минус», т. е. $-2x \cdot 4$. Прибавим и вычтем квадрат второго выражения 4 и перепишем третье слагаемое. Получим

$$x^2 - 8x + 19 = x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 + 19 =$$
$$= (x - 4)^2 - 4^2 + 19 = (x - 4)^2 + 3.$$

Таким образом, из квадратного трёхчлена $x - 8x + 19$ выделили квадрат разности $(x - 4)^2$.

Пример 2. Из квадратного трёхчлена $x^2 + 3x - 1$ выделим квадрат суммы двух выражений.

Слагаемое x^2 будем считать квадратом первого выражения x. Слагаемое $3x$ представим в виде удвоенного произведения первого и второго выражений, т. е. $2x \cdot \frac{3}{2}$. Прибавим и вычтем квадрат второго выражения и перепишем третье слагаемое. Получим

$$x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = \left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{4}.$$

Выделение квадрата двучлена из квадратного трёхчлена применяется при разложении квадратных трёхчленов на множители и при решении некоторых других задач.

Пример 3. Разложим на множители квадратный трёхчлен $x^2 + 4x + 3$.

Выделим из квадратного трёхчлена $x^2 + 4x + 3$ квадрат двучлена и применим формулу разности квадратов. Получим

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2x \cdot 2 + 4 - 4 + 3 =$$

$$= (x + 2)^2 - 1 = (x + 2 - 1)(x + 2 + 1) = (x + 1)(x + 3).$$

Пример 4. Разложим на множители квадратный трёхчлен $3x^2 + x - 2$.

Вынесем за скобки множитель 3 и из полученного в скобках квадратного трёхчлена выделим квадрат двучлена:

$$3x^2 + x - 2 = 3\left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right) = 3\left(x + \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right)\left(x + \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) =$$

$$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 1) = (3x - 2)(x + 1).$$

Пример 5. Докажем, что из всех прямоугольников с периметром 16 см наибольшую площадь имеет квадрат со стороной 4 см.

Пусть одна из сторон прямоугольника равна x см, тогда смежная с ней сторона равна $(8 - x)$ см. Площадь прямоугольника равна $x(8 - x)$ см^2. Раскрыв скобки в выражении $x(8 - x)$, получим квадратный трёхчлен $-x^2 + 8x$. Преобразуем его:

$$-x^2 + 8x = -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 2x \cdot 4 + 16 - 16) =$$

$$= -((x - 4)^2 - 16) = -(x - 4)^2 + 16.$$

Значение выражения $-(x - 4)^2 + 16$ зависит от слагаемого $-(x - 4)^2$, которое принимает отрицательные значения или равно нулю. Площадь прямоугольника имеет наибольшее значение, когда выражение $-(x - 4)^2$ равно нулю. Это возможно лишь при $x = 4$. Если одна из смежных сторон прямоугольника с периметром 16 см равна 4 см, то и другая сторона равна 4 см. Значит, прямоугольником, имеющим наибольшую площадь, является квадрат.

Упражнения

831. Запишите коэффициенты квадратного трёхчлена:

а) $4x + 3x^2 + 1$; в) $x^2 - 4 + 2x$;

б) $1 - x - 2x^2$; г) $-x^2 - 5x$.

832. Выделите квадрат суммы или разности из квадратного трёхчлена:

а) $x^2 + 10x - 20$; в) $x^2 - 5x - 4$;

б) $x^2 - 6x + 15$; г) $x^2 + x + 1$.

833. Выделите квадрат двучлена из неполного квадратного трёхчлена:

а) $x^2 + 4x$; в) $x^2 + 7x$;

б) $x^2 - 6x$; г) $x^2 - x$.

834. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $x^2 - x - 6$; в) $x^2 - 8x + 15$;

б) $x^2 + 3x - 4$; г) $x^2 + 8x + 12$.

835. Представьте в виде произведения:

а) $3x^2 + 9x + 6$; г) $6x^2 - 11x - 30$;

б) $-x^2 - 5x + 14$; д) $\frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}x + 3$;

в) $4x^2 - 16x + 7$; е) $\frac{1}{3}x^2 + 2\frac{2}{3}x - 16$.

836. Докажите, что при любых значениях x квадратный трёхчлен:

а) $x^2 - 14x + 50$ принимает лишь положительные значения;

б) $-x^2 + 6x - 11$ принимает лишь отрицательные значения;

в) $-\frac{1}{9}x^2 + 2x - 9$ не принимает положительных значений;

г) $2x^2 - 8x + 9$ не принимает отрицательных значений.

837. При каком значении x квадратный трёхчлен $x^2 + 10x + 32$ принимает наименьшее значение? Найдите это значение.

838. Найдите наибольшее значение квадратного трёхчлена $-x^2 - 2x + 7$. Какому x соответствует это значение?

839. При каком значении x квадратный трёхчлен:

а) $x^2 + 6x + 5$ принимает наименьшее значение;

б) $-x^2 + 4x + 1$ принимает наибольшее значение?

840. Найдите наибольшее или наименьшее значение квадратного трёхчлена:

а) $-x^2 - x - 2$; в) $\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}$;

б) $x^2 - 0{,}6x + 2$; г) $-3x^2 - 6x + 1$.

841. Забором длиной 64 м нужно огородить прямоугольный участок наибольшей площади. Каковы должны быть размеры участка?

842. Прямоугольный участок земли одной стороной выходит на пруд. Вдоль трёх других сторон требуется поставить забор длиной 60 м. Какие размеры должны быть у этого участка, чтобы его площадь была наибольшей? Вычислите площадь.

Упражнения для повторения

843. Верно ли, что при любом значении x принимает положительное значение выражение:

а) $(x - 7)^2$; в) $(x - 9)^2 + 3$; д) $5(1 - x)^2 + 1$;

б) $(8 + x)^2$; г) $4 - (x + 2)^2$; е) $(x + 10)^2 - 1$?

844. Какие из выражений:

а) $-5x^2$; в) $-1 - (x + 3)^2$; д) $-(3x + 5)^2 + 8$

б) $-(x + 2)^2$; г) $-2(x + 1)^2 - 3$;

принимают отрицательные значения при любых значениях x?

845. Расстояние между двумя автомобилями, движущимися навстречу друг другу, равно 300 км. Через $1\frac{1}{4}$ ч оно сократилось до 100 км. Найдите скорости автомобилей, если у одного из них скорость на 20 км/ч больше, чем у другого.

846. Два автомобиля двигались навстречу друг другу. Через 2 ч после встречи расстояние между ними стало равным 280 км. Найдите скорости автомобилей, если у одного из них скорость на 10 км/ч меньше, чем у другого.

29. Квадрат суммы нескольких слагаемых

Возведём в квадрат сумму $a + b + c$. Для этого представим степень $(a + b + c)^2$ в виде произведения и применим правило умножения многочленов. Получим

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) =$$
$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Значит,

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \quad (1)$$

Формула (1) упрощает запись квадрата любого трёхчлена в виде многочлена.

Квадрат суммы трёх выражений равен сумме квадратов этих выражений, сложенной со всеми удвоенными произведениями выражений, взятых по два.

Пример 1. Возведём в квадрат трёхчлен $2a + m + 3k$.
Используя формулу (1), получим

$$(2a + m + 3k)^2 = (2a)^2 + m^2 + (3k)^2 + 2 \cdot 2a \cdot m + 2 \cdot 2a \cdot 3k + \\ + 2 \cdot m \cdot 3k = 4a^2 + m^2 + 9k^2 + 4am + 12ak + 6mk.$$

Пример 2. Возведём в квадрат трёхчлен $3m - 5n - 2k$.
Выражение $3m - 5n - 2k$ представляет сумму $3m$, $-5n$ и $-2k$. Применяя к квадрату этой суммы формулу (1), получим

$$(3m - 5n - 2k)^2 = 9m^2 + 25n^2 + 4k^2 - 30mn - 12mk + 20nk.$$

Возведём в квадрат сумму $a + b + c + d$.

Можно поступить так же, как и для трёх слагаемых: представить квадрат суммы в виде произведения и перемножить многочлены. Но интереснее рассмотреть другой способ — способ замены переменных. Если обозначить сумму $a + b + c$ через x, то равенство будет выглядеть так:

$$(a + b + c + d)^2 = (x + d)^2 = x^2 + 2xd + d^2.$$

Применив обратную замену, получим

$$x^2 + 2xd + d^2 = (a + b + c)^2 + 2d(a + b + c) + d^2.$$

Воспользовавшись формулой для квадрата суммы трёх слагаемых и раскрыв вторую скобку, получим

$$(a + b + c + d)^2 = \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2ad + 2bd + 2cd + d^2.$$

Можно было бы ввести двойную замену переменных: обозначить $a + b = x$, $c + d = y$ и рассмотреть квадрат двучлена $(x + y)^2$. Выведите формулу квадрата четырёх слагаемых, используя двойную замену, самостоятельно.

Итак,

$$(a + b + c + d)^2 = \\ = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd. \quad (2)$$

Формула (2) читается так же, как и формула (1).

Квадрат суммы четырёх выражений равен сумме квадратов этих выражений, сложенной со всеми удвоенными произведениями выражений, взятых по два.

Для тождеств квадрата суммы и разности двух выражений, квадрата суммы трёх, четырёх и т. д. выражений можно дать общую формулировку.

Квадрат суммы нескольких выражений равен сумме квадратов этих выражений, сложенной со всеми удвоенными произведениями выражений, взятых по два.

Пример 3. Возведём в квадрат четырёхчлен $x - 3y + 2z - 4u$.

Применяя формулу (2) к степени $(x - 3y + 2z - 4u)^2$, получим

$$(x - 3y + 2z - 4u)^2 =$$
$$= x^2 + (-3y)^2 + (2z)^2 + (-4u)^2 + 2 \cdot x \cdot (-3y) + 2 \cdot x \cdot 2z +$$
$$+ 2 \cdot x \cdot (-4u) + 2 \cdot (-3y) \cdot 2z + 2 \cdot (-3y) \cdot (-4u) + 2 \cdot 2z \cdot (-4u) =$$
$$= x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 16u^2 - 6xy + 4xz - 8xu - 12yz + 24yu - 16zu.$$

Упражнения

847. На рисунке 15 изображён квадрат со стороной $a + b + c$, разбитый на прямоугольники. Используя рисунок, разъясните геометрический смысл формулы

$$(a + b + c)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

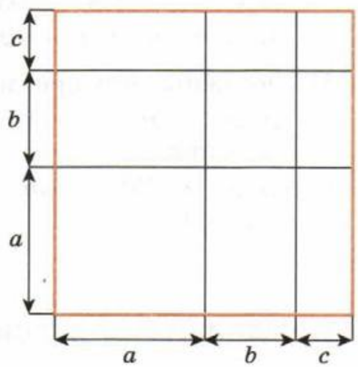


Рис. 15

848. Представьте в виде многочлена:

а) $(2a + 3b + 4c)^2$;

б) $(y - 2x + 5)^2$;

в) $\left(4p + \frac{1}{2}q - 2\right)^2$;

г) $\left(\frac{1}{2}p^2 - 4k - 5m\right)^2$;

д) $(m + 2n + 5k + p)^2$;

е) $\left(4p + \frac{1}{2}q - u - 3\right)^2$;

ж) $(2a - 3b + c^2 - d)^2$;

з) $(m^2 + ab - 3n + 4)^2$.

849. Выполните действие:

а) $(x^{n+1} - x^n + x^{n-1})^2$;

б) $(a^{n+1} - 2a^{n+2} + 3a^{n+3})^2$.

850. Упростите выражение:

а) $(x + 2y + z)^2 - 2(2xy + xz + 2yz)$;

б) $(3m - n - k)^2 + 2(3mn + 3mk - nk)$;

в) $(4a + 2b - 3)^2 - (4a - 2b + 3)^2$;

г) $(c^2 + 2c + 3)^2 + (c^2 - 2c - 3)^2 - 2(c^2 + 2)^2$.

851. Докажите тождество

$$(a + b + c)^2 + b^2 - 2ac = (a + b)^2 + (b + c)^2.$$

852. Докажите, что значение выражения

$$(x^2 - 2x - 2)^2 - (x - 4)(x^3 + 8)$$

не зависит от значений переменной x.

853. Докажите, что если $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = (x + y - 2z)^2 + (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2$, то $x = y = z$.

854. Представьте в виде квадрата трёхчлена выражение:

а) $x^2 + y^2 + 4 + 2xy + 4x + 4y$;

б) $a^2 + 4b^2 + 1 - 4ab + 2a - 4b$.

855. Докажите, что при любых значениях a, b и c многочлен:

а) $a^2 + 9b^2 + c^2 - 6ab - 2ac + 6bc$ принимает неотрицательные значения;

б) $a^2 + 4b^2 - 4ab - 10a + 20b + 26$ принимает положительные значения.

Упражнения для повторения

856. Разложите на множители:

а) $4x^2 - 12x + 9$;

б) $1 - 14a + 49a^2$.

857. Решите уравнение:

а) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2 - 13 = 27$;

б) $(5x - 1)^2 - 2 = \frac{(10x + 1)^2}{4} - 3$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Чему равен квадрат суммы двух выражений?
2. Чему равен квадрат разности двух выражений?
3. Сформулируйте определение квадратного трёхчлена и приведите примеры.
4. Покажите на примере, как разложить на множители квадратный трёхчлен.
5. Чему равен квадрат суммы нескольких слагаемых?

§ 13. Куб суммы и куб разности. Сумма и разность кубов

30. Возведение в куб суммы и разности

Представим в виде многочлена куб суммы a и b. Для этого можно записать степень $(a + b)^3$ в виде произведения $(a + b)(a + b)(a + b)$ и применить правило умножения многочлена на многочлен. Однако проще представить эту степень в виде произведения $(a + b)^2(a + b)$ и применить сначала формулу квадрата суммы, а затем правило умножения многочленов. Получим

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Значит,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \qquad (1)$$

Полученное тождество называют *формулой куба суммы*.

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения, плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго, плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго, плюс куб второго выражения.

Пример 1. Представим выражение $(3x + 2)^3$ в виде многочлена.

Применяя формулу (1), получим

$$(3x + 2)^3 = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 + 2^3 =$$
$$= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8.$$

Пример 2. Возведём в куб двучлен $-2a + 1$.

Выражение $(-2a + 1)^3$ является кубом суммы выражений $-2a$ и 1. Используя формулу (1), находим

$$(-2a + 1)^3 = (-2a)^3 + 3 \cdot (-2a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2a) \cdot 1^2 + 1^3 =$$
$$= -8a^3 + 12a^2 - 6a + 1.$$

Возведём в куб разность a и b. Представим выражение $(a - b)^3$ в виде произведения $(a - b)^2(a - b)$ и применим сначала формулу квадрата разности, а затем правило умножения многочленов. Получим

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Значит,

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \qquad (2)$$

Полученное тождество называют *формулой куба разности*.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения, минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго, плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго, минус куб второго выражения.

Формулу (2) можно получить иначе, если рассматривать выражение $(a - b)^3$ как куб суммы a и $-b$. Тогда по формуле (1) получим

$$(a - b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Пример 3. Возведём в куб разность $2x - 5$.

Применяя формулу (2), получим

$$(2x - 5)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 5^2 - 5^3 =$$
$$= 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125.$$

Аналогично тому, как была выведена формула куба суммы двух выражений, можно вывести формулы для возведения двучлена в 4-ю, 5-ю и т. д. степени. Так, формула для представления 4-й степени двучлена в виде многочлена будет иметь вид:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Формула для представления 5-й степени двучлена в виде многочлена будет такой:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Было замечено, что коэффициенты многочленов, являющихся какой-либо степенью двучлена, образуют треугольную таблицу, которую принято называть треугольником Паскаля.

Первой строчкой таблицы являются коэффициенты первой степени двучлена $(a + b)$, т. е. числа 1 и 1. Во второй строчке таблицы записываются коэффициенты многочлена, являющегося второй степенью двучлена $(a + b)$, т. е. числа 1, 2, 1. В третью строчку записываются коэффициенты многочлена, получающегося при возведении двучлена в куб: 1, 3, 3, 1. И так далее. В результате получается таблица, изображённая ниже.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

Легко видеть, что каждое число в треугольнике Паскаля является суммой двух чисел, записанных над этим числом. Например, в пятой строке число 5 является суммой чисел 1 и 4, записанных над ним, число 10 — суммой чисел 4 и 6. Согласно этому правилу легко продолжить треугольник Паскаля далее и найти коэффициенты многочленов, получающихся при возведении двучлена (бинома) в 6-ю, 7-ю и т. д. степени. У треугольника Паскаля, составленного из биномиальных коэффициентов, много интересных свойств. О некоторых из этих свойств будет рассказано в старших классах.

Упражнения

858. На рисунке 16 изображён куб с ребром $a + b$, разбитый на восемь прямоугольных параллелепипедов. Используя этот рисунок, объясните геометрический смысл формулы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

при $a > 0$ и $b > 0$.

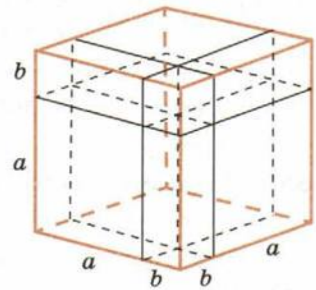


Рис. 16

859. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(m + n)^3$; д) $(10 - a)^3$;
б) $(m - n)^3$; е) $(p + 3)^3$;
в) $(x - 1)^3$; ж) $(0{,}1 + y)^3$;
г) $(2 + k)^3$; з) $\left(m - \frac{1}{3}\right)^3$.

860. Преобразуйте в многочлен выражение:

а) $(-m + n)^3$; в) $(-x - y)^3$;
б) $(-2 + k)^3$; г) $(-0{,}5 + p)^3$.

861. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(2m - 3n)^3$; в) $(3x + y^2)^3$; д) $-(2c - k^3)^3$;
б) $(5a + 2b)^3$; г) $(p^2 - 2k)^3$; е) $-(m^3 + 3p)^3$.

862. Преобразуйте в многочлен выражение:

а) $(4p + k)^3$; в) $(2x - 3y)^3$; д) $\left(\frac{1}{2}m - n^2\right)^3$;
б) $(3m - k)^3$; г) $(4x + 3y)^3$; е) $\left(m^2 + \frac{1}{3}n\right)^3$.

863. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(x^n + 1)^3$; в) $4(x^{n-1} + 3x)^3$;
б) $(3 - x^n)^3$; г) $-2(x^{n+1} - x^{n-1})^3$.

864. Упростите выражение:

а) $(x + y)^3 + (x - y)^3$; в) $(m - n)^3 + 3mn(m - n)$;

б) $(x + y)^3 - (x - y)^3$; г) $3mn(m + n) - (m + n)^3$.

865. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(p + q)^3 - p(p - q)^2$;

б) $3y(x + y)^2 + (x - y)^3$;

в) $(m - n)^3 - (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;

г) $(m + n)(m^2 - mn + n^2) - (m + n)^3$.

866. Упростите выражение:

а) $(2x + y)^3 - 6xy(2x + y)$;

б) $27y^2(x - y) - (x - 3y)^3$;

в) $(3a - b)^3 - 3a(3a - b)^2$;

г) $3b(a + 3b)^2 - (a + 3b)^3$.

867. Докажите тождество:

а) $(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y)$;

б) $3xy(y - x) = (x - y)^3 - x^3 + y^3$.

868. Найдите значение выражения:

а) $x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ при $x = -18$ и $y = -28$;

б) $3xy(x + y) + x^3 + y^3$ при $x = -33$ и $y = 23$.

869. При каких значениях x и y верно равенство:

а) $(x - y)^3 = (y - x)^3$;

б) $(x - y)^3 = x^3 - y^3$;

в) $(x - y)^2 = (y - x)^2$?

870. Решите уравнение:

а) $(2x + 1)^3 = 4x^2(2x + 3)$;

б) $27x^2(1 - x) = (1 - 3x)^3$.

Упражнения для повторения

871. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} = 1$; в) $\frac{5x+1}{4} = \frac{2x-1}{3}$;

б) $\frac{3m}{2} - 2 = \frac{5m}{4} - 10$; г) $\frac{8-3m}{2} = \frac{5m}{6} - 1\frac{5}{6}$.

872. Двузначное число содержит в первом слева разряде на 3 единицы больше, чем во втором. Если сумму цифр этого числа разделить на 5, то в остатке получится 2, а в частном на 1 меньше, чем единиц в первом справа разряде. Найдите это двузначное число.

873. В координатной плоскости постройте ломаную $ABCDE$ с вершинами в точках $A(-3; -1)$, $B(1; 3)$, $C(3; -3)$, $D(4; 0)$, $E(0; -4)$ и укажите координаты общих точек ломаной и:

а) оси ординат;

б) оси абсцисс.

874. Запишите в виде выражения:

а) квадрат разности $2x$ и $5y$;

б) разность квадратов $3m$ и $2n$;

в) куб суммы x и $2y$;

г) сумму кубов $2a$ и b;

д) куб разности $5p$ и 8;

е) разность кубов $3p$ и 4.

31. Разложение на множители суммы и разности кубов

Формулы куба суммы и куба разности двух выражений являются формулами сокращённого умножения. Рассмотрим ещё две формулы сокращённого умножения.

Умножим разность a и b на выражение $a^2 + ab + b^2$, называемое *неполным квадратом суммы* a и b. Оно отличается от квадрата суммы a и b, т. е. выражения $a^2 + 2ab + b^2$, тем, что в него входит произведение a и b вместо удвоенного произведения a и b. Теперь выполним умножение:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) =$$
$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 =$$
$$= a^3 - b^3.$$

Значит,

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3. \qquad (1)$$

Произведение разности двух выражений и неполного квадрата их суммы равно разности кубов этих выражений.

Пример 1. Представим в виде многочлена произведение

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2).$$

Множитель $2x - y$ представляет собой разность $2x$ и y.

Множитель $4x^2 + 2xy + y^2$ есть неполный квадрат суммы $2x$ и y, так как он равен квадрату $2x$, плюс произведение $2x$ и y, плюс квадрат y:

$$4x^2 + 2xy + y^2 = (2x)^2 + (2x)y + y^2.$$

По формуле (1) данное произведение

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$$

равно разности кубов выражений $2x$ и y:

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = (2x)^3 - y^3 = 8x^3 - y^3.$$

Умножим сумму a и b на выражение $a^2 - ab + b^2$, называемое *неполным квадратом разности a и b*:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + b^3.$$

Значит,

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3. \qquad (2)$$

Произведение суммы двух выражений и неполного квадрата их разности равно сумме кубов этих выражений.

Пример 2. Представим в виде многочлена произведение

$$(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2).$$

Один из множителей произведения есть сумма выражений $3x$ и $2y$, а другой — неполный квадрат их разности, так как

$$9x^2 - 6xy + 4y^2 = (3x)^2 - (3x)(2y) + (2y)^2.$$

По формуле (2) данное произведение $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$ равно сумме кубов выражений $3x$ и $2y$:

$$(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) = (3x)^3 + (2y)^3 = 27x^3 + 8y^3.$$

В каждом из тождеств (1) и (2) поменяем местами левую и правую части. Получим тождества

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \qquad (3)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2). \qquad (4)$$

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.
Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Формулы (3) и (4) дают возможность предствлять в виде произведения сумму и разность кубов двух выражений.

Пример 3. Представим в виде произведения выражение $1000m^3 - 27n^3$.

Представим выражение $1000m^3 - 27n^3$ в виде разности кубов и применим формулу (3). Получим

$$1000m^3 - 27n^3 = (10m)^3 - (3n)^3 = (10m - 3n)(100m^2 + 30mn + 9n^2).$$

Пример 4. Разложим на множители многочлен $8p^3 + 0{,}001q^3$.

Представим выражение $8p^3 + 0{,}001q^3$ в виде суммы кубов и воспользуемся формулой (4). Получим

$$8p^3 + 0{,}001q^3 = (2p)^3 + (0{,}1q)^3 = (2p + 0{,}1q)(4p^2 - 0{,}2pq + 0{,}01q^2).$$

Упражнения

875. Запишите неполный квадрат:

а) суммы x и y; в) разности $5a$ и $2b$;
б) разности s и t; г) суммы $0{,}3m$ и $10n$.

876. Представьте в виде многочлена:

а) $(m - n)(m^2 + mn + n^2)$; в) $(p^2 - pq + q^2)(p + q)$;
б) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$; г) $(n^2 + m^2 + mn)(m - n)$.

877. Преобразуйте в многочлен выражение:

а) $(3x + k)(9x^2 - 3xk + k^2)$; в) $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$;
б) $(p - 5q)(p^2 + 5pq + 25q^2)$; г) $(3 + 2b)(9 - 6b + 4b^2)$.

878. Представьте в виде многочлена:

а) $(1 - m)(1 + m + m^2)$; в) $(2 - 3k)(4 + 6k + 9k^2)$;
б) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$; г) $(3a + 2)(9a^2 - 6a + 4)$.

879. Запишите в виде многочлена:

а) $\left(\frac{1}{3} - 2a\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}a + 4a^2\right)$; д) $\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\left(\frac{1}{4} - k + 4k^2\right)$;

б) $\left(3m + \frac{1}{2}\right)\left(9m^2 - 1\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right)$; е) $\left(3p - \frac{1}{3}\right)\left(9p^2 + p + \frac{1}{9}\right)$;

в) $(5m - 3n)(25m^2 + 15mn + 9n^2)$; ж) $(4a + 5b)(16a^2 - 20ab + 25b^2)$;

г) $\left(\frac{2}{3}a + 3b\right)\left(\frac{4}{9}a^2 - 2ab + 9b^2\right)$; з) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{9}y^2\right)$.

880. Разложите на множители:

а) $m^3 - n^3$; в) $-a^3 + b^3$; д) $1 + m^3$;
б) $x^3 + y^3$; г) $p^3 + 2^3$; е) $a^3 - 1$.

881. Представьте выражение в виде суммы или разности кубов и разложите его на множители:

а) $x^3 - 1000$; в) $8y^3 + 27$; д) $1 - 216p^3$;
б) $125 + m^3$; г) $64 - 8a^3$; е) $27m^3 + 1$.

882. Представьте в виде произведения:

а) $\frac{1}{8} + 8x^3$; в) $\frac{1}{27}p^3 - a^3$; д) $0{,}008a^3 - b^3$;

б) $8 - \frac{1}{8}m^3$; г) $p^3 + \frac{1}{27}a^3$; е) $m^3 + 0{,}064n^3$.

883. Разложите на множители:

а) $a^{3n} - b^{3n}$; в) $x^{3n-3} - y^{3n-3}$;
б) $a^{3k} + b^{3k}$; г) $x^{3k+3} + y^{3k+3}$.

884. Представьте в виде произведения:

а) $m^6 - 27$; в) $x^6 + y^6$; д) $a^9 - b^9$;

б) $64 + a^6$; г) $m^6 - n^3$; е) $x^6 + y^9$.

885. Разложите на множители:

а) $1 - m^3n^3$; в) $8 + m^3n^3$; д) $m^3n^6 - a^3$;

б) $a^3x^3 + 1$; г) $p^3q^3 - 27$; е) $p^6q^3 + a^3$.

886. Докажите, что значение выражения:

а) $638^3 + 612^3$ кратно 625;

б) $18^3 - 9^3$ кратно 7.

Упражнения для повторения

887. Представьте в виде многочлена:

а) $(2x - 5)^3 - 2x(2x - 1)(2x + 1)$; б) $27a^2(a + b) - (3a + b)^3$.

888. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$;

б) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0$.

889 В трёх кусках 75 м ткани. В первом куске в 1,5 раза больше ткани, чем во втором и третьем вместе. Сколько ткани в каждом куске, если во втором на 10 м больше, чем в третьем?

32. Разложение на множители разности n-х степеней

Мы вывели формулы для разложения на множители разности $a^n - b^n$ при $n = 2$ и $n = 3$:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Аналогичную формулу можно получить для $n = 4$:

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) =$$
$$= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Итак,

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

В каждом из рассмотренных случаев мы представляли разность $a^n - b^n$ в виде произведения разности $a - b$ и некоторого многочлена. В структуре этого многочлена хорошо просматривается определённая закономерность: многочлен состоит из n членов и расположен по убывающим степеням буквы a, степень каждого члена равна $n - 1$, коэффициент каждого члена равен единице.

Можно предположить, что для $n = 5$ справедлива формула

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Действительно,

$$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) =$$
$$= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 -$$
$$- a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 = a^5 - b^5.$$

Вообще при любом $n \in N$

$$\boldsymbol{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).}$$

Чтобы убедиться в этом, перемножим многочлены в правой части равенства:

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) =$$
$$= a^n + a^{n-1}b + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 -$$
$$- \ldots - ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n.$$

Из формулы равенства n-х степеней нетрудно получить формулу суммы n-х степеней с нечётным показателем n.

При нечётном натуральном показателе n сумму $a^n + b^n$ можно представить в виде разности $a^n - (-b)^n$. Применяя к этой разности n-х степеней выведенную формулу и заменяя в ней b на $-b$, получим формулу суммы n-х степеней с нечётным показателем:

$$\boldsymbol{a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).}$$

Частным случаем этой формулы является известная вам формула суммы кубов:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Заметим, что сумму $a^n + b^n$ при чётном n нельзя представить в виде произведения двух множителей, один из которых — двучлен $a + b$, а другой — многочлен.

Допустим, что $a^n + b^n = (a + b) \cdot P$, где $n \in N$ и n — чётное число, а P — некоторый многочлен.

Это равенство не является тождеством, так как, например, при $a = 1$ и $b = -1$ его левая часть будет равна $1^n + (-1)^n = 2$, а правая равна 0.

Упражнения

890. Разложите на множители разность $a^7 - b^7$ и выполните проверку с помощью умножения.

891. Разложите на множители:

а) $a^6 - b^6$; в) $1 - p^5$; д) $16a^4 - b^4$;
б) $x^7 - 1$; г) $a^7 - 128$; е) $32x^5 - y^5$.

892. Докажите, что значение выражения:

а) $81^5 - 3^{10}$ кратно 6;

б) $13^8 - 4^4$ кратно 11;

в) $17^{12} - 49^6$ кратно 10;

г) $121^6 - 2^{12}$ кратно 9;

д) $9^{10} + 19^5$ кратно 100;

е) $101^{12} - 64^2$ кратно 99.

893. Разложите на множители:

а) $a^5 + b^5$; в) $b^7 + 1$; д) $128 + x^7$;

б) $x^7 + y^7$; г) $p^5 + 243$; е) $32m^5 + 1$.

894. Докажите, что при любом $n \in N$ значение выражения:

а) $2 \cdot 4^n + 5^{2n+1}$ кратно 7;

б) $7^{2n+1} + 3 \cdot 9^n$ кратно 10.

Упражнения для повторения

895. Докажите, что выражение $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ не принимает отрицательных значений.

896. Решите уравнение:

а) $(2x - 1)^3 - 4x^2(2x - 3) = 1{,}1$;

б) $(3x + 2)^3 - 27x^2(x + 2) = 12$.

897. В координатной плоскости отметьте все точки с координатами $(x_0; y_0)$, где

x_0 — корень уравнения $x^3 + 6x^2 - 4x - 24 = 0$,

y_0 — корень уравнения $(y + 3)^2 + 2(y + 3)(y - 2) + (y - 2)^2 = 0$.

Сколько таких точек?

33. Применение различных способов разложения многочленов на множители

Мы рассмотрели три способа разложения многочленов на множители:
вынесение общего множителя за скобки,
группировка членов многочлена,
применение формул сокращённого умножения.

Рассмотрим примеры, в которых потребуется применять не один из этих способов, а несколько. В таких случаях следует попытаться вынести за скобки общий множитель.

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$3x^3 - 3xy^2.$$

Вынесем за скобки общий множитель $3x$. Имеем

$$3x^3 - 3xy^2 = 3x(x^2 - y^2).$$

В полученном произведении $3x(x^2 - y^2)$ множитель $x^2 - y^2$ можно разложить по формуле разности квадратов. Значит,

$$3x^3 - 3xy^2 = 3x(x^2 - y^2) = 3x(x - y)(x + y).$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$18m^2 - 48m + 32.$$

Вынесем за скобки общий множитель 2. Получим

$$18m^2 - 48m + 32 = 2(9m^2 - 24m + 16).$$

Многочлен $9m^2 - 24m + 16$ можно представить в виде квадрата разности $3m - 4$. Значит,

$$18m^2 - 48m + 32 = 2(9m^2 - 24m + 16) = 2(3m - 4)^2.$$

Пример 3. Разложим на множители многочлен

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2.$$

Представим сумму трёх первых членов в виде квадрата суммы x и y:

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = (x + y)^2 - z^2.$$

Применив формулу разности квадратов, получим

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = (x + y)^2 - z^2 =$$
$$= (x + y - z)(x + y + z).$$

Пример 4. Разложим на множители многочлен

$$y^3 - 3y^2 + 6y - 8.$$

Сгруппируем первый член с последним, а второй член с третьим и выполним разложение на множители:

$$y^3 - 3y^2 + 6y - 8 = (y^3 - 8) - (3y^2 - 6y) =$$
$$= (y - 2)(y^2 + 2y + 4) - 3y(y - 2) =$$
$$= (y - 2)(y^2 + 2y + 4 - 3y) =$$
$$= (y - 2)(y^2 - y + 4).$$

Пример 5. Разложим на множители многочлен

$$2a^4 + 30a^3 + 150a^2 + 250a.$$

Сначала вынесем общий множитель за скобки, а затем применим формулу куба суммы. Имеем

$$2a^4 + 30a^3 + 150a^2 + 250a =$$
$$= 2a(a^3 + 15a^2 + 75a + 125) = 2a(a + 5)^3.$$

Упражнения

898. Разложите на множители многочлен:

а) $6m^2 - 6n$;
б) $-3a^2 + 3b^2$;
в) $xy^2 - xz^2$;
г) $4am^2 - 4an^2$;
д) $5x^2 - 45$;
е) $81 - 9p^2$;
ж) $12a^2 - 27b^2$;
з) $50m^2 - 8n^2$;
и) $5x^3 - 45x$;
к) $64y - 4y^3$;
л) $8a^3 - 2ab^2$;
м) $-63mn^2 + 28m^3$.

899. Выполните разложение на множители:

а) $m - m^3$;
б) $p^4 - p^2$;
в) $-y^8 + y^5$;
г) $3a^3 - 3a$;
д) $4n^4 - 4n^6$;
е) $-7x^2 + 7x^4$;
ж) $8x^3 - 2x$;
з) $9x^3 - 25x$;
и) $18m^2 - 32m^4$.

900. Докажите, что разность между кубом натурального числа и самим числом кратна 6.

901. Разложите на множители:

а) $7p^2 - 7g^2$;
б) $am^2 - an^2$;
в) $32 - 50y^2$;
г) $27x^2 - 12y^2$;
д) $a^3 - a$;
е) $-m^2 + m^4$;
ж) $6n^2 - 6n^4$;
з) $50x^3 - 18x$;
и) $-48a^4 + 27a^2b^2$.

902. Предс тавьте в виде произведения:

а) $x^4 - y^4$;
б) $81 - m^4$;
в) $a - a^5$;
г) $3x^5 - 5x$;
д) $2a^4b - 2b^5$;
е) $3a^5b - 3ab^5$.

903. Докажите тождество

$$x^8 - y^8 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4).$$

904. Решите уравнение:

а) $x - x^3 = 0$;
б) $4y^3 - y = 0$;
в) $x^4 - x^2 = 0$;
г) $9y^2 - 4y^4 = 0$.

905. Разложите на множители:

а) $5m^2 - 10mn + 5n^2$;
б) $20p - 50 - 2p^2$;
в) $-9x^2 - 6x - 1$;
г) $12a^2 + 36ab + 27b^2$;
д) $36x^2 - 48xy + 16y^2$;
е) $8a^3 + 8a^2b + 2ab^2$.

906. Выполните разложение на множители:

а) $7x^2 - 42x + 63$;
б) $80 + 40a + 5a^2$;
в) $28x^2 - 84xy + 63y^2$;
г) $2a^3 - 20a^2b + 50ab^2$.

907. Решите уравнение:

а) $11x^2 + 88x + 176 = 0$; б) $2y^2 - 6y + 4\frac{1}{2} = 0$.

908. Разложите на множители:

а) $15a + 10b - 5ab - 30$; г) $12x^2 + 12y - 16x - 9xy$;
б) $75 + 15n - 12mn - 60m$; д) $-15a^2 - 60ab + 48b + 12a$;
в) $-30k + 30 - 10p + 10kp$; е) $-24m^2 - 24n - 16m - 36mn$.

909. Выполните разложение на множители:

а) $m^2 + m^2n - mn - m^3$; в) $6x^2y + 3x^2 - 6x^3 - 3xy$;
б) $p^3 - p^2q + p^2 - pq$; г) $2kp^2 - 4k^2 + 4k^2p - 2kp$.

910. Представьте в виде произведения многочлен:

а) $m - x^2 - 2xy - y^2$; в) $4 - x^2 + 2xy - y^2$;
б) $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$; г) $9a^2 - b^2 - 24a + 16$.

911. Выполните разложение на множители:

а) $x^2 - y^2 + 3x - 3y$; г) $4x^2 - 4y^2 + 3x + 3y$;
б) $4a + 4b - a^2 + b^2$; д) $6a^2 - 6b^2 + 5a - 5b$;
в) $m^2 - 5m - n^2 + 5n$; е) $3m - 3n + 9m^2 - 9n^2$.

912. Разложите на множители:

а) $x^3 - x^2y - x + y$; в) $p^3 - pk^2 - 3k^2 + 3p^2$;
б) $4a - ab^2 + 4b - b^3$; г) $bc^2 - 2c^2 - b^3 + 2b^2$.

913. Разложите на множители:

а) $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$; в) $7a^3 + a^2 + a + 7$;
б) $y^3 - 5y^2 + 5y - 1$; г) $8b^3 + 3b^2 - 3b - 8$.

914. Выполните разложение на множители:

а) $x^5 - x^3y^2 - x^2y^3 + y^5$; в) $a^5 - 4a^3 - 8a^2 + 32$;
б) $m^5 + m^3n^2 + m^2n^3 + n^5$; г) $27 - 27p^2 + p^3 - p^5$.

915. Представьте в виде произведения:

а) $4x^4 - \frac{1}{2}x$; в) $x^6 + 2x^3y^3 + y^6$;

б) $\frac{1}{9}y + 3y^4$; г) $a^6 - 16a^3 + 64$.

916. Разложите на множители:

а) $16m^2 + 2m$; в) $a^6 - a^4b^2 + a^3b^3 - ab^5$;
б) $3k - 81k^4$; г) $a^5b - a^3b^3 - a^2b^4 + b^6$.

917. Разложите на множители:

а) $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$;
б) $4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2$.

918. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

а) $(n + 21)^3 - (n + 4)^3$ кратно 17;

б) $(n + 48)^3 - (n + 7)^3$ кратно 41;

в) $(n + 3)^3 - (n - 3)^3$ кратно 18.

919. Докажите, что значение выражения:

а) $5 \cdot 7^{12} - 5$ кратно 30;

б) $7 \cdot 3^{11} + 7$ кратно 28.

Упражнения для повторения

920. Докажите, что выражение принимает лишь положительные значения:

а) $4 + 2z + z^2$; б) $x^2 - 4x + 5$; в) $2x^2 - 6x + 5$.

921. По упорядоченному ряду данных

$$\underbrace{2; 2; ...; 2;}_{n} \underbrace{3; 3; ...; 3;}_{n+1} \underbrace{4; 4; ...; 4;}_{n+2} 100, \text{ где } n \in \boldsymbol{N},$$

определите его объём, размах, среднее арифметическое и медиану, если:

а) $n = 3$; б) $n = 8$; в) $n = 20$.

Что происходит с каждой из характеристик при увеличении значения n?

922. Найдите значение выражения:

а) $(8m - 3)(8m + 3) - (4m + 3)(16m - 3)$ при $m = 10; -1{,}5$;

б) $(5x + 7)(3x + 7) - (4x + 7)^2$ при $x = -9; 0{,}7$.

923. От дома до станции фермер доехал за 30 мин. На обратном пути он увеличил скорость на 25 км/ч и поэтому доехал от станции до дома на 10 мин быстрее. С какой скоростью ехал фермер от дома до станции?

? Контрольные вопросы и задания

1. Чему равен куб суммы двух выражений?
2. Чему равен куб разности двух выражений?
3. Чему равно произведение разности двух выражений и неполного квадрата их суммы?
4. Чему равно произведение суммы двух выражений и неполного квадрата их разности?
5. Чему равна разность кубов двух выражений? Напишите формулу.
6. Чему равна сумма кубов двух выражений? Напишите формулу.

Дополнительные упражнения к главе 6

К параграфу 11

924. Представьте в виде многочлена:

а) $(13 - 2a)(2a + 13)$; д) $(-2a^5 + 3)(2a^5 + 3)$;
б) $(3x^2 + 5)(5 - 3x^2)$; е) $(5c^3 - 4)(4 + 5c^3)$;
в) $(4m^4 - 1)(4m^4 + 1)$; ж) $(2a^2 + 3b^2)(3b^2 - 2a^2)$;
г) $(7x^3 + 2)(7x^3 - 2)$; з) $(-6p - 5q^5)(6p - 5q^5)$.

925. Найдите значение выражения:

а) $206 \cdot 194$; в) $9{,}3 \cdot 10{,}7$; д) $30\frac{2}{5} \cdot 29\frac{3}{5}$;
б) $19\frac{3}{4} \cdot 20\frac{1}{4}$; г) $30{,}2 \cdot 29{,}8$; е) $49\frac{4}{7} \cdot 50\frac{3}{7}$.

926. Преобразуйте в многочлен:

а) $2xy(x - y)(x + y)$;
б) $-3a^2b(a + b)(a - b)$;
в) $5m(m^2 + 4)(4 - m^2)$;
г) $-4a^2(1 - 2a^2)(2a^2 + 1)$;
д) $(x - 5)(x + 5)(x^2 + 25)$;
е) $(2 - a^2)(2 + a^2)(4 + a^4)$;
ж) $(m^6 + 1)(m^3 + 1)(m^3 - 1)$;
з) $(3 - 2p^2)(4p^4 + 9)(2p^2 + 3)$.

927. Упростите выражение:

а) $(2m - 1)(2m + 1) - m(4m + 5)$;
б) $8(2x^2 - 3) - (1 + 4x)(4x - 1)$;
в) $(3a + 5)(3a - 5) + (a + 6)(4 - 9a)$;
г) $(10m - 7)(10m - 3) + (10m + 3)(3 - 10m)$;
д) $(2y + 1)(2y - 1) - (2y + 5)(2y - 5)$;
е) $(6a - 7)(7 + 6a) + (7 - 8a)(8a + 7)$.

928. Разложите на множители:

а) $0{,}04x^4 - 0{,}25y^2$; г) $\frac{16}{25}p^4 - \frac{49}{100}q^4$;
б) $0{,}81a^4 - 0{,}49b^4$; д) $1\frac{9}{16}a^4 - 2\frac{1}{4}c^6$;
в) $\frac{4}{9}m^2 - \frac{9}{16}n^4$; е) $2{,}25m^6 - 1\frac{7}{9}n^2$.

929. Найдите значение выражения:

а) $\frac{52^2-37^2}{57^2-32^2}+\frac{39^2-36^2}{45^2-30^2}$; б) $\frac{41^2-17^2}{37^2-21^2}-\frac{39^2-27^2}{45^2-21^2}$.

930. Разложите на множители:

а) $16x^4 - 81y^4$; в) $\frac{1}{81}m^8-1$;

б) $48a^4 - 3b^4$; г) $32-\frac{1}{2}m^6$.

931. Представьте в виде произведения:

а) $(2x - 3)^2 - 9$; д) $(5x + 4)^2 - (4x - 5)^2$;

б) $16 - (5 - 6a)^2$; е) $(7 - 3p)^2 - (8p + 1)^2$;

в) $(4x + 7)^2 - 25x^2$; ж) $(9a + 4)^2 - (3 + 8a)^2$;

г) $49m^2 - (3m + 4)^2$; з) $(10k - 11)^2 - (4k - 6)^2$.

932. Разложите на множители:

а) $4(2a + 1)^2 - 9a^2$;

б) $25x^2 - 16(3x - 5)^2$;

в) $36m^2 - 9(10m + 3)^2$;

г) $16(5k - 11)^2 - 100k^2$;

д) $81(2k + 1)^2 - (k - 3)^2$;

е) $(8p - 5)^2 - 9(3p + 2)^2$;

ж) $4(2x + 9)^2 - 4(x - 7)^2$;

з) $64(2 - 5a)^2 - 25(6a - 5)^2$.

933. Найдите значение выражения:

а) $(2x - 3)^2 - (3x - 2)^2$ при $x = 11$;

б) $(4a + 5b)^2 - (3a + 4b)^2$ при $a = 9$ и $b = -8$.

934. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

а) $(3n + 2)^2 - (3n + 1)^2$ кратно 3;

б) $(5n + 1)^2 - (5n - 1)^2$ кратно 20;

в) $(n + 2)^2 - (n - 1)^2$ не кратно 6;

г) $\left(1\frac{1}{2}n+3\right)^2-\left(1\frac{1}{2}n+2\right)^2$ не кратно 3.

935. Упростите выражение

$$(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)(a^8 + 1)(a^{16} + 1)(a^{32} + 1).$$

936. Какой цифрой оканчивается разность квадратов двух двузначных чисел, из которых одно оканчивается цифрой 3, а другое — цифрой 7?

937. Длина прямоугольника на 5 см больше его ширины. На двух смежных сторонах этого прямоугольника построены квадраты, разность площадей которых равна 85 см^2. Найдите площадь прямоугольника.

938. Из квадратного листа жести сделали коробку, вырезав по углам квадраты со стороной 6 см и загнув получившиеся края (рис. 17). Найдите размеры листа и объём коробки, если площадь её дна на 456 см^2 меньше площади листа жести.

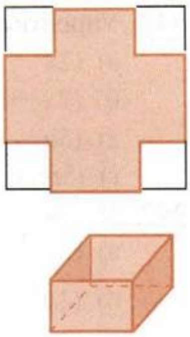


Рис. 17

К параграфу 12

939. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $\left(\frac{1}{2}m+\frac{2}{3}\right)^2$; ж) $(3m^2 - 0,2mn)^2$;

б) $\left(1\frac{1}{3}-\frac{1}{2}k\right)^2$; з) $(6xy + 0,3x^2)^2$;

в) $\left(2x+\frac{1}{3}y\right)^2$; и) $\left(\frac{2}{3}a^2b^2-1\frac{1}{2}b^2\right)^2$;

г) $\left(\frac{2}{5}p-4q\right)^2$; к) $\left(1\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4}x^2y^2\right)^2$;

д) $(0,5a - 4ab)^2$; л) $\left(\frac{4}{5}x^2y^3-2\frac{1}{2}x^3y^2\right)^2$;

е) $(0,6cd + 5d)^2$; м) $\left(3\frac{1}{3}m^4n^2+1\frac{1}{2}m^2n\right)^2$.

940. Найдите одночлен, при подстановке в равенство которого вместо m получается тождество:

а) $(3x + m)^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2$;

б) $(m - 2a)^2 = 49b^2 - 28ab + 4a^2$;

в) $(m + 4y)^2 = x^2 - 8xy + 16y^2$;

г) $(3p - 2m)^2 = 9p^2 + 24pk + 16k^2$;

д) $\left(2a+\frac{1}{2}b\right)^2 = 4a^2 + 2ab + m^2$;

е) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^2 = m^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$.

941. Может ли при каких-либо значениях переменной быть верным равенство:

а) $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 25$; в) $(4m + 5)^2 = 16m^2 + 29$;

б) $(3k - 7)^2 = 9k^2 - 49$; г) $(7a - 3)^2 = 49a^2 + 40a$?

942. Упростите выражение:

а) $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2$;

б) $(2x + 3y)^2 + (2x - 3y)^2$;

в) $(3a - 4b)^2 + (2a + 6b)^2$;

г) $(5m - 2n)^2 - (4m + n)^2$.

943. Найдите значение выражения:

а) $(2x^2 - y^2)^2 + (x^2 + 2y^2)^2$ при $x = 2$, $y = -2$;

б) $(3a^2 - b)^2 - (3a^2 + b)^2$ при $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1,5$.

944. Докажите тождество Диофанта Александрийского:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

945. В работах Леонарда Эйлера используется тождество

$$(p^2 + cq^2)(r^2 + cs^2) = (pr + cqs)^2 + c(ps - qr)^2.$$

Докажите это тождество.

946. Докажите, что квадрат числа, являющегося суммой квадратов двух различных натуральных чисел, можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

947. Докажите, что при любом значении x сумма квадратов двучленов $x + 3$ и $x - 3$ на 36 больше их удвоенного произведения.

948. Докажите, что при любом значении x выражение

$$(3x^2 + 4)^2 - 3(3x^2 + 5)(x^2 + 1)$$

принимает одно и то же значение.

949. Докажите тождество $(10n + 5)^2 = 100n(n + 1) + 25$.
Сформулируйте правило возведения в квадрат натурального числа, оканчивающегося цифрой 5. Найдите по этому правилу значение степеней: 15^2, 35^2, 55^2, 85^2, 105^2.

950. Разложите на множители:

а) $x^4 + 10x^2 + 25$;

б) $4a^4 - 12a^2 + 9$;

в) $m^4 - 20m^2n + 100n^2$;

г) $16p^2 + 8pk^3 + k^6$;

д) $4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4$;

е) $\frac{1}{9}a^6 + \frac{1}{3}a^3b^2 + \frac{1}{4}b^4$.

951. Представьте в виде произведения:

а) $-28a + 4a^2 + 49$;

б) $-36m^2 + 60m - 25$;

в) $20a^2b - 25b^2 - 4a^4$;

г) $24x^2y^2 - 9x^4 - 16y^4$.

952. Докажите, что многочлен не принимает отрицательных значений:

а) $m^2 - 2mn + n^2 + p^2$;

б) $2a^2 + b^2 - 2b + 1$;

в) $9x^2 + y^2 - 6x + 1$;

г) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 1$;

д) $1 - 4ab + a^2b^2 + a^2 + b^2$;

е) $m^2 + n^2 + 6m - 4n + 13$.

953. Может ли принимать отрицательные значения многочлен:

а) $x^2 - 16x + 65$; в) $a^2 - 2ab - b^2$;

б) $m^2 - 10m + 24$; г) $a^2 + 2ab + 2b^2$?

К параграфу 13

954. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $\left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{2}{3}n\right)^3$; в) $\left(\frac{1}{3}mn - \frac{2}{3}n^2\right)^3$;

б) $\left(\frac{2}{3}m^2 + \frac{1}{2}n\right)^3$; г) $\left(\frac{3}{7}m^3 + 7m^2n\right)^3$.

955. Используя формулу куба суммы или куба разности, найдите значение степени:

а) 11^3; б) 21^3; в) 19^3; г) $\left(3\frac{2}{3}\right)^3$.

956. Упростите выражение:

а) $(3p - 4)^3 + (11p - 8)^2$;

б) $(2k + 3)^3 - (6k + 5)^2$;

в) $2y(x + 2y)^2 + (x - 2y)^3$;

г) $2x(2x - y)^2 - (2x + y)^3$.

957. Найдите значение выражения:

а) $125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$ при $x = -0{,}6$;

б) $64 - 144m + 108m^2 - 27m^3$ при $m = \frac{2}{3}$.

958. Представьте в виде многочлена:

а) $(x + y)^4$; в) $(x + y)^6$;

б) $(x - y)^4$; г) $(x - y)^6$.

959. Используя тождества, полученные в № 958, представьте в виде многочлена выражение:

а) $(m + 1)^4$; б) $(m - 1)^4$; в) $(2a + b)^4$; г) $(a - 2b)^4$.

960. Представьте в виде многочлена:

а) $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$;

б) $(5m + 3n)(25m^2 - 15mn + 9n^2)$;

в) $\left(\frac{1}{5}a - 5b\right)\left(\frac{1}{25}a^2 + ab + 25b^2\right)$;

г) $(0{,}25m^2 + 4n)\left(\frac{1}{16}m^4 - m^2n + 16n^2\right)$.

961. Найдите значение выражения:

а) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9x^2)$ при $x = 2\frac{1}{2}$ и $y = 1\frac{1}{3}$;

б) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}xy + \frac{1}{9}y^2\right)$ при $x = \frac{2}{3}$ и $y = 1\frac{1}{2}$.

962. Представьте в виде произведения:

а) $1 - 0{,}125m^2$;

б) $0{,}008a^3 + 1$;

в) $8x^3 - 0{,}001y^3$;

г) $0{,}027p^3 - 27k^3$;

д) $64x^6 - y^6$;

е) $p^6 + \frac{1}{64}k^6$;

ж) $m^9 - n^9$;

з) $m^9 + n^9$.

963. Разложите на множители:

а) $250x^3 - 300x^2y + 120xy^2 - 16y^3$;

б) $5a^3 + 6a^2b + 2\frac{2}{5}ab^2 + \frac{8}{25}b^3$.

964. Докажите, что значение выражения:

а) $29^3 + 46^3$ кратно 25;

б) $114^3 - 33^3$ кратно 81;

в) $12^3 + 13^3$ кратно 157;

г) $31^3 + 19^3$ кратно 1911.

965. Разложите на множители:

а) $(2x + y)^3 - x^3$;

б) $(m - 3n)^3 - m^3$;

в) $8p^3 - (p + 1)^3$;

г) $27k^3 + (2k - 3)^3$.

966. Найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{3}(8{,}57^3 - 5{,}57^3) - 3 \cdot 8{,}57 \cdot 5{,}57$;

б) $\frac{1}{9}(2{,}76^3 + 6{,}24^3) + 3 \cdot 2{,}76 \cdot 6{,}24$.

967. Докажите тождество:

а) $(a - b)((a + b)^2 - ab) = a^3 - b^3$;

б) $(a + b)((a - b)^2 + ab) = a^3 + b^3$;

в) $(a + b)((a + b)^2 - 3ab) = a^3 + b^3$;

г) $(a - b)((a - b)^2 + 3ab) = a^3 - b^3$.

968. Докажите, что при любом $n \in N$:

а) $6^n \cdot 2^{2n} - 1$ кратно 23;

б) $5^n \cdot 6^n - 3^{2n}$ кратно 21.

969. Разложите на множители:

а) $3{,}4x^2 - 3{,}4y^2$;
б) $0{,}16a^2 + 0{,}16b^2$;
в) $3x^4 - 3y^4$;
г) $0{,}25m^2 - 0{,}25n^2$;
д) $2{,}5p^4 - 2{,}5k^4$;
е) $16a^8 - 16b^8$.

970. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(2x + y + 3z)^2$;
б) $(4a - 3b + 2c)^2$;
в) $(5m - 4n + 3)^2$;
г) $(7p - 2k - 6)^2$.

971. Представьте в виде произведения многочлен:

а) $2{,}5x^2 + 30xy + 90y^2$;
б) $3m^2 - 4m + 1\frac{1}{3}$;
в) $8a^2 - 4ab + \frac{1}{2}b^2$;
г) $6k^2 + 2k + \frac{1}{6}$.

972. Преобразуйте в произведение:

а) $90x^4 - 240x^2 + 160$;
б) $72a^2 - 27 - 48a^4$;
в) $8m^3n + 24m^2n^2 + 18mn^3$;
г) $-75x^5y^2 + 120x^3y^3 - 48xy^4$.

973. Разложите на множители многочлен:

а) $12m^2 - 6mn - 9n + 18m$;
б) $4p + 24kp - 8k - 12p^2$;
в) $120a^3 + 48a^2 - 100a^2b - 40ab$;
г) $9c^2d^2 - 6c^2d - 36cd^3 + 24cd^2$;
д) $m^3 + 3m^2 - m - 3$;
е) $2a^3 - 3a^2 - 50a + 75$;
ж) $x^3 + 9 - 9x - x^2$;
з) $-18 - 9m + 8m^2 + 4m^3$.

974. Решите уравнение:

а) $m^3 + 6m^2 - m - 6 = 0$;
б) $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$;
в) $\frac{1}{8} - \frac{1}{4}p - \frac{1}{2}p^2 + p^3 = 0$;
г) $27m - 90 = 3m^3 - 10m^2$;
д) $9x^3 - 16x = 27x^2 - 48$;
е) $8a^3 + 12a^2 - 18a = 27$.

975. Разложите на множители:

а) $3m - 3n + m^2 - n^2$;

б) $a^2 + 5a - b^2 + 5b$;

в) $9x^2 - a^2 + 9x - 3a$;

г) $p^2 + 5p - 4q^2 + 10q$;

д) $16x^2 - 9y^2 - 20x + 15y$;

е) $100m^2 - 30m - 49n^2 - 21n$;

ж) $24a + 20c - 36a^2 + 25c^2$;

з) $70m - 49m^2 - 30n + 9n^2$.

976. Представьте в виде произведения многочлен:

а) $4a^2 - 4ab + b^2 - 4$;

б) $9 - 25x^2 + 30xy - 9y^2$;

в) $36x^2 - 25 + 60xy + 25y^2$;

г) $16 - 24ab - 16a^2 - 9b^2$;

д) $9n^2 - 16m^2 + 40m - 25$;

е) $25a^2 - 20a + 4 - 4b^2$;

ж) $16c^2 - 9m^2 - 42m - 49$;

з) $70x + 25 - 36y^2 + 49x^2$.

977. Преобразуйте в произведение многочлен:

а) $20x^2 - 45y^2 + 30y - 5$;

б) $27c^2 + 60ab - 12a^2 - 75b^2$;

в) $18a^2 + 24a + 8 - 200m^2$;

г) $48p^2 + 72pk + 27k^2 - 27s^2$.

978. Представьте в виде произведения многочленов выражение:

а) $x^4 + x^2 + 1$; б) $x^4 + 4$.

Глава 7 Функции

В этой главе начинается систематическое изучение функциональной линии. Рассматривается понятие функции, графика функции, вводится соответствующая терминология (независимая переменная, аргумент, область определения функции; зависимая переменная, функция, область значений функции); вводится функциональная символика, рассматривается применение понятия функции в практических ситуациях, в том числе графическое представление статистических данных. В этой главе подробно рассматриваются прямая пропорциональность и линейная функция, чуть менее подробно — степенная функция с натуральным показателем. Линейная функция и её график помогут в изучении линейных уравнений с двумя переменными и их графиков.

§ 14. Функции и их графики

34. Что такое функция

Рассмотрим два множества: множество X двузначных чисел и множество Y натуральных чисел, которые меньше 10 000. Каждому элементу множества X поставим в соответствие тот элемент множества Y, который является квадратом этого двузначного числа. Например, числу 12 соответствует число 144, числу 37 — число 1369. При этом любому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y. Такие соответствия называют *функциями* (от латинского слова *functio* — совершение, исполнение).

Определение. Функцией называется соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу одного множества соответствует единственный элемент другого множества.

В рассмотренном примере соответствие между множеством X и множеством Y было задано описанием. Функции часто задают аналитически, т. е. с помощью формул.

Пусть x — переменная, множеством значений которой является множество двузначных чисел, т. е. множество X, а y — переменная, множеством значений которой являются их квадраты, т. е. подмножество множества Y. Тогда соответствие между множествами X и Y можно задать формулой

$$y = x^2.$$

Значения переменной y зависят от значений x. Переменную y называют *зависимой переменной* или *функцией*, а переменную x — *независимой переменной* или *аргументом* (от латинского слова *argumentum*).

В рассмотренном примере все двузначные числа являются *значениями аргумента*, а соответствующие им квадраты — *значениями функции*.

Рассмотрим формулы

$$b = a^2 + a - 12 \text{ и } y = \frac{x}{x-2}.$$

Этими формулами задаются функции. Действительно, каждому значению переменной a соответствует единственное значение переменной b. Например, если $a = -2$, то $b = -10$; если $a = 0$, то $b = -12$; если $a = 5$, то $b = 18$. Каждому значению переменной x, отличному от 2, соответствует единственное значение переменной y. Например,

если $x = 0$, то $y = 0$; если $x = 4$, то $y = 2$; если $x = -1$, то $y = \frac{1}{3}$.

Говорят, что функция $b = a^2 + a - 12$ определена на множестве всех значений переменной a или что *область определения* этой функции есть множество всех чисел. Функция $y = \frac{x}{x-2}$ определена на множестве всех чисел, отличных от 2, т. е. областью определения этой функции является множество всех чисел, кроме числа 2.

Вообще областью определения функции называют множество значений аргумента.

Если переменная y является функцией от переменной x, то используется запись $y = f(x)$ (читается: «y равен f от x»). Если функция задана выражением с переменной x, то символом $f(x)$ обозначается выражение, которым задаётся функция. Например, вместо $y = x$ можно записать $f(x) = x$.

Пусть, например, требуется найти значение функции $y = f(x)$ при $x = -2$, где $f(x) = x^2 - 2x$. Тогда $f(-2)$ — значение данной функции при $x = -2$, т. е.

$$f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) = 4 + 4 = 8.$$

Буква f — это имя данной функции, правило соответствия. Для обозначения функций используются и другие буквы латинского или греческого алфавита: g, h, φ, ψ и т. д. Например, $h(x) = x^2 + x - 12$, $\varphi(x) = \frac{x}{x-2}$. Для обозначения аргумента функции чаще всего используется буква x, но применяются и другие буквы: a, t, r и т. д.

Все значения, которые принимает функция, образуют множество, которое называют *областью значений функции*. Например, функция $y = |x|$ принимает неотрицательные значения, т. е. её областью значений является множество всех неотрицательных чисел.

Не всякое соответствие между элементами двух множеств является функцией. Например, если рассматривать множество натуральных чисел и множество простых делителей каждого из них, то числу 6 будет соответствовать более одного простого делителя — числа 2 и 3.

Мы рассмотрели примеры функций, в которых значения аргумента и значения функций представляют собой числа. Такие функции называют *числовыми функциями*.

Заметим, что в математике рассматриваются и нечисловые функции. Например, каждому рациональному числу соответствует единственная точка на координатной прямой. Это соответствие является функцией.

В курсе алгебры мы главным образом будем заниматься изучением числовых функций. С такими функциями вы уже неоднократно встречались. Приведём примеры.

Пример 1. Пусть автомобиль движется со скоростью 70 км/ч в течение 4 ч, s — пройденный им путь (в км), а t — время его движения (в ч).

Переменная s является функцией от t. Эту функцию можно задать формулой

$$s = 70t, \text{ где } 0 \leqslant t \leqslant 4.$$

Пример 2. Пусть p — периметр квадрата (в см), а x — длина его стороны (в см).

Переменная p является функцией от x, которую можно задать формулой

$$p = 4x, \text{ где } x > 0.$$

Пример 3. Каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число m, которое при делении на 3 в частном даёт n и в остатке 1.

Переменная m является функцией от n. Эту функцию можно задать формулой

$$m = 3n + 1, \text{ где } n \in N.$$

Пример 4. Первую часть пути от озера до станции турист прошёл за 3 ч со скоростью 4 км/ч. Затем 1 ч отдыхал, а после отдыха оставшуюся часть пути до станции турист прошёл за 2 ч со скоростью 5 км/ч.

Расстояние s (в км) от озера до места нахождения туриста является функцией времени t (в ч).

Эту функцию можно задать тремя формулами. Когда время t изменяется от 0 до 3 ч, расстояние от озера до места нахождения туриста равно $4t$ км, т. е. $s = 4t$, если $0 \leqslant t \leqslant 3$. В период от 3 ч до 4 ч расстояние остаётся неизменным, равным 12 км, т. е. $s = 12$, если $3 < t \leqslant 4$. Когда время t изменяется от 4 ч до 6 ч, расстояние равно $12 + 5(t - 4)$ км, т. е. $s = 12 + 5(t - 4)$, если $4 < t \leqslant 6$.

Это можно записать короче:

$$s = \begin{cases} 4t, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ 12, \text{ если } 3 < t \leqslant 4, \\ 12 + 5(t-4), \text{ если } 4 < t \leqslant 6 \end{cases}$$

или

$$s(t) = \begin{cases} 4t, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ 12, \text{ если } 3 < t \leqslant 4, \\ 5t - 8, \text{ если } 4 < t \leqslant 6. \end{cases}$$

Областью определения этой функции служат все числа, удовлетворяющие двойному неравенству $0 \leqslant t \leqslant 6$. Если функция $y = f(x)$ задана формулой и её область определения не указана, то областью определения функции f является множество допустимых значений переменной x в выражении $f(x)$. Например, областью определения функции

$$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$$

является область допустимых значений переменной x в выражении $\frac{4x-3}{2x-2}$, т. е. множество всех чисел, кроме 1.

Добавим, что, помимо описания и формул, функции можно задавать таблицей. Так, ещё в Древнем Вавилоне в XVIII в. до н. э. были составлены таблицы, в которых натуральному числу n ставились в соответствие числа n^2, n^3, $\frac{1}{n}$ и $n^2 + n^3$. Фактически с помощью этих таблиц были заданы функции, хотя определение функции было дано лишь через две тысячи лет, а сам термин появился в работах Г. В. Лейбница в XVII в.

На каждом железнодорожном вокзале есть таблица стоимости проезда на пригородных электропоездах в зависимости от зоны, в которой находится пункт назначения. Это также пример табличного задания функции.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716), немецкий философ, математик, физик; один из создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Упражнения

979. Пусть множество X состоит из всех целых чисел, а множество Y — из трёх чисел: -1, 0 и 1. Поставим в соответствие каждому отрицательному числу множества X число -1, нулю — 0, а каждому положительному числу — число 1. Это соответствие является функцией (объясните почему). Обозначим эту функцию буквой φ.

а) Найдите: $\varphi(-40)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(0)$, $\varphi(25)$.

б) Укажите область определения и область значений функции φ.

980. Даны соответствия между элементами некоторых множеств:

а) каждому ученику школы поставлено в соответствие четырёхзначное число, соответствующее году его рождения;

б) каждому дню в году поставлен в соответствие ученик школы, родившийся в этот день;

в) каждому натуральному числу поставлен в соответствие остаток от деления этого числа на 7;

г) каждому положительному числу поставлена в соответствие точка на координатной прямой, расстояние от которой до начала отсчёта равно этому числу.

Какие из этих соответствий являются функциями? Почему?

981. Функция задана таблицей:

а)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	3	6	9	12	15	18	21	24	27

б)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	8	27	64	125	216	343	512	729

в)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	15	25	35	45	55	65	75	85	95

г)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	12	6	4	3	2,4	2	$1\frac{5}{7}$	1,5	$1\frac{1}{3}$

Подберите формулу, которой можно задать эту функцию.

982. Функция, область определения которой — множество $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, задана формулой $y = x^2 - 3$. Задайте эту функцию таблицей.

983. Функция задана формулой

$$y = (x - 1)(x + 5).$$

В таблице указаны значения аргумента x с шагом 0,5 (каждое следующее значение x больше предыдущего на 0,5). Заполните таблицу, вычислив соответствующие значения функции.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
y									

984. Функция задана формулой

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}, \text{ где } -3 \leqslant x \leqslant 3.$$

Составьте таблицу, указав значения аргумента x с шагом 1, и заполните её, вычислив соответствующее значение функции.

985. Функция задана формулой $y = 2x - 3$.

а) Найдите значения функции для значений аргумента, равных $-1{,}5$; 0; 2; 3,5.

б) При каком значении аргумента значение функции равно 5; 1; 0; -7?

986. Функция задана формулой $y = \frac{5x - 10}{3}$. Найдите:

а) значение y, если $x = -7$; 5; 2,2; $3\frac{1}{3}$;

б) значение x, если $y = -3$; 10; $\frac{2}{3}$; 0.

987. Функция задана формулой $f(x) = 3 - 2x$. Найдите:

а) $f(-3)$; $f(0)$; $f(2{,}5)$;

б) значение аргумента x, при котором $f(x) = -17$; 0; 117.

988. Дана функция $\varphi(t) = 3 - |2t + 1|$. Найдите:

а) $\varphi(-2) + \varphi(-1) + \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2)$;

б) все значения аргумента, при которых $\varphi(t) = 0$; 3; 5.

989. Найдите значение функции $y = \begin{cases} 3 - 2x, \text{ если } x \leqslant 1{,}5, \\ 2x - 3, \text{ если } x > 1{,}5 \end{cases}$ при $x = 1$; 2.

990. Даны функции $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$ и $h(x) = x^2 - 5$. Найдите значения аргумента, при которых $g(x) = h(x)$.

991. Найдите область определения функции:

а) $y = 10x - 3$;

б) $y = \frac{1}{x - 5}$;

в) $y = x^2 - 8x + 2$;

г) $y = \frac{4}{x(x - 3)}$;

д) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$;

е) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

992. При каких значениях b областью определения функции является множество всех чисел, если:

а) $y = \frac{2}{x^2 + 2x + b}$; б) $y = \frac{2x}{|x-1| - b}$?

993. Найдите все значения b, при которых областью определения функции являются все числа, кроме $x = 1$, если:

а) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x + b}$; б) $h(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x-1| - b}$.

994. Докажите, что областью значений функции являются только положительные числа, если:

а) $y = \frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 + |x| + 1}$; б) $y = \frac{-x^2 + 5x - 7}{-|x| - 1}$.

995. Календарь за май текущего года ставит в соответствие каждому числу месяца определённый день недели. Это соответствие является функцией (почему?).

а) Укажите область определения этой функции.

б) Найдите значение функции для значений аргумента, равных 3; 11; 20; 28.

в) Найдите значения аргумента, для которых значением функции является вторник; пятница.

996. Функция задана описанием: каждому натуральному числу x, где $10 \leqslant x \leqslant 20$, поставлен в соответствие остаток от деления этого числа на 5. Задайте эту функцию таблицей.

997. Функция, область определения которой — множество B, где $B = \{x \mid x \in N,\ 1 < x < 20\}$, задана описанием: каждому числу x соответствует число y его натуральных делителей. Задайте эту функцию таблицей.

998. Задайте таблицей функцию:

$$y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \in \{-3, -2, -1, 0\}, \\ 2x - 1, \text{ если } x \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

999. Первый час пути велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, а второй час — со скоростью 15 км/ч. Расстояние s (в км), пройденное велосипедистом с начала движения, есть функция времени его движения t (в ч). Задайте функцию s от t двумя выражениями.

1000. В парке была высажена сосна высотой 1 м. За каждый год в течение первых 5 лет её высота увеличивалась на 0,3 м, а за каждый следующий год — на 0,4 м. Как изменялась высота сосны h (в м) в зависимости от времени x (в годах) в течение первых 10 лет? Задайте функцию h от x двумя формулами.

1001. Докажите, что формулами $y = (x + 5)^2 - (x - 5)^2$ и $y = 20x$ задана одна и та же функция.

1002. Задайте более простой формулой функцию:

а) $y = (x - 2)(x + 2) + 5$;

б) $y = x(x - 8) + 4(2x - 1)$;

в) $y = \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{2}$;

г) $y = \frac{(x-2)^2 - (x-4)^2}{4}$.

1003. При каком значении a формулы

$$y = x^3 - (x + a)(x^2 - 2x + 1) \quad \text{и} \quad y = 1{,}5x^2 - 0{,}5$$

задают одну и ту же функцию?

Упражнения для повторения

1004. Представьте в виде квадрата двучлена:

а) $4 - 12a^2b^2 + 9a^4b^4$;

б) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2$.

1005. Представьте в виде многочлена:

а) $(a + 5)^2 - (a - 3)^2$;

б) $(x - 7)(x + 7) - (x - 4)^2$.

1006. Разложите на множители:

а) $x^5 - x$;

б) $81a^4 - (3a - 2)^2$.

1007. Решите уравнение:

а) $x^4 - 16 = 0$;

б) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$.

1008. В координатной плоскости постройте окружность с центром в точке $M(3; -4)$ и радиусом 5 единиц. Укажите координаты точек пересечения окружности с осями координат.

1009. Упорядоченный ряд данных состоит из целых чисел. Может ли быть дробью:

а) размах ряда;

б) среднее арифметическое ряда;

в) мода;

г) медиана?

35. График функции

Рассмотрим функцию, заданную формулой

$$y = \frac{x(4-x)}{2}$$

на множестве X, где $X = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 6\}$. Составим таблицу соответственных значений аргумента и функции для целых значений x.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-6	$-2\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$	-6

Отметим в координатной плоскости все точки, координатами которых служат соответственные значения переменных x и y (рис. 18). Эти точки намечают некоторую линию. Для того чтобы иметь более точное представление об этой линии, нужно к точкам, построенным на рисунке 18, добавить некоторые промежуточные точки с нецелыми абсциссами, удовлетворяющими двойному неравенству $-2 \leqslant x \leqslant 6$. Все такие точки мы построить не можем, так как их бесконечное множество. Но мы можем построить часть из них, составив более «плотную» таблицу, например с шагом 0,5.

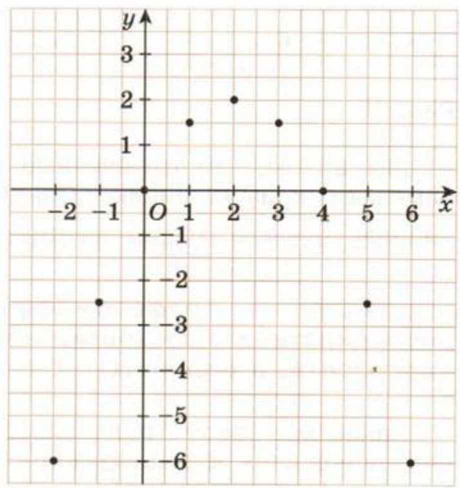


Рис. 18

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
y	-6	$-4\frac{1}{8}$	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{8}$	0	$\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{8}$

x	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4	$4{,}5$	5	$5{,}5$	6
y	2	$1\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	0	$-1\frac{1}{8}$	$-2\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{8}$	-6

Отметим на координатной плоскости все точки с координатами, взятыми из таблицы (рис. 19).

7 Алгебра. 7 кл.

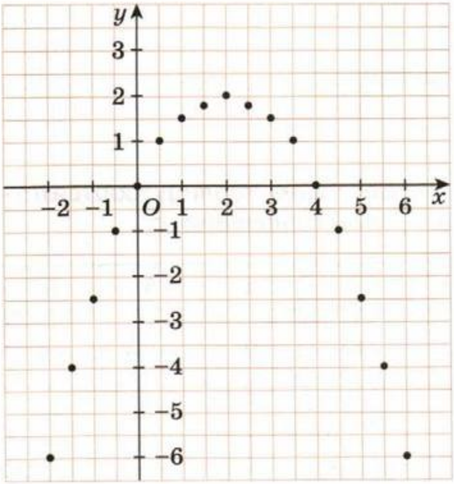


Рис. 19

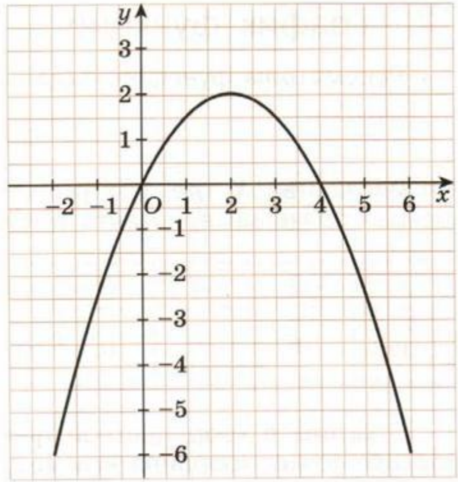


Рис. 20

Мы видим, что отмеченные на рисунке 19 точки достаточно ясно намечают кривую линию. Соединив эти точки плавной непрерывной линией, получим график функции $y = \frac{x(4-x)}{2}$, где $-2 \leqslant x \leqslant 6$ (рис. 20).

Определение. Графиком функции называется множество точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Ранее мы рассмотрели способы задания функции формулой, таблицей, описанием. Функцию можно задавать и графиком. Так, кардиограмма — графический способ описания работы сердца, сейсмограмма — графическое описание колебаний почвы в зависимости от времени и т. д.

На рисунке 21 изображён график изменения температуры воздуха в течение суток.

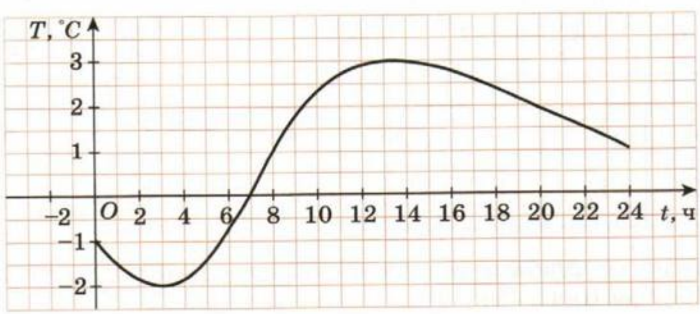


Рис. 21

Этим графиком задана функция T от t, где $0 \leqslant t \leqslant 24$. По графику мы можем найти значение функции T для указанного значения аргумента t (т. е. значение температуры для определённого момента времени).

Найдём, например, значение T для $t = 8$ (установим, какая температура была в 8 ч). Для этого проведём перпендикуляр к оси t через точку оси t с абсциссой, равной 8. Точка пересечения этого перпендикуляра с графиком функции имеет ординату, равную 1. Значит, при $t = 8$ значение функции равно 1 (в 8 ч температура воздуха была равна 1°С).

По этому графику можно найти также, в какое время температура воздуха была равна нулю, была выше нуля или ниже нуля, когда она возрастала или убывала, была наибольшей или наименьшей.

Функция принимает значение, равное нулю, в тех точках, в которых график функции пересекает ось абсцисс. В данном случае $T = 0$ при $t = 7$.

Функция принимает положительные значения на множестве тех значений аргумента, которым соответствуют части графика, расположенные выше оси абсцисс, т. е. $T > 0$ при $7 < t \leqslant 24$.

Функция принимает отрицательные значения на множестве тех значений аргумента, которым соответствуют части графика, расположенные ниже оси абсцисс, т. е. $T < 0$ при $0 \leqslant t < 7$.

Функция принимает наибольшее значение, равное 3, при $t = 13{,}5$, и наименьшее значение, равное −2, при $t = 3$, т. е. наибольшей в течение суток была температура $T = 3$ °С, а наименьшей $T = -2$ °С.

Отметим важную особенность графика функции. Если точка $M(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то её координаты при подстановке обращают формулу, задающую функцию, в верное числовое равенство, т. е. $f(x_0) = y_0$. И обратно, если координаты точки $M(x_0;\ y_0)$ при подстановке в формулу обращают её в верное числовое равенство, то эта точка принадлежит графику данной функции (говорят, что график функции проходит через данную точку).

Заметим, что не всякая линия (или вообще множество точек) может служить графиком функции. Например, графиком функции не может быть окружность (рис. 22), так как найдётся прямая, перпендикулярная оси абсцисс, которая пересечёт окружность в двух точках. Значит, в этом случае нарушается условие однозначности, согласно которому каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции.

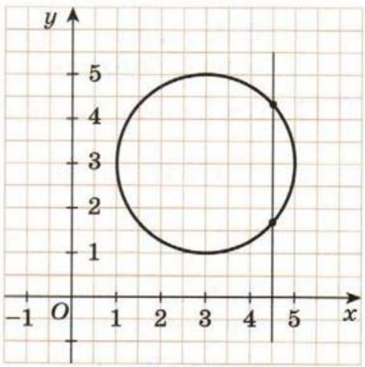


Рис. 22

Упражнения

1010. Какая из кривых, изображённых на рисунке 23, может служить графиком функции?

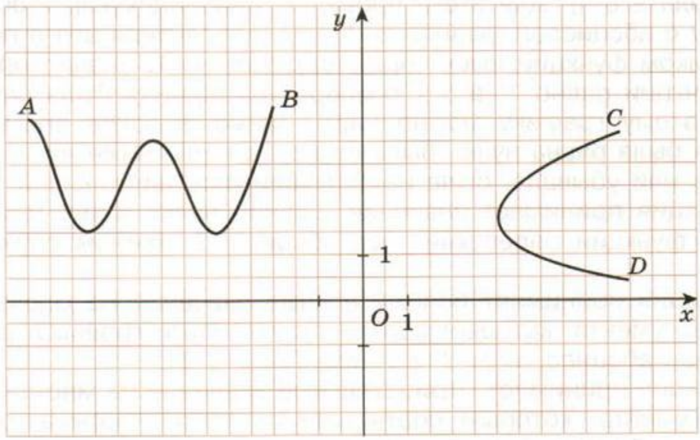


Рис. 23

1011. Функция задана формулой $y = x^2 - 5$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

а) Заполните таблицу и постройте график функции.

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
y									

б) Запишите с помощью двойного неравенства область значений данной функции.

1012. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = \frac{1}{2}x + 1$, где $-4 \leqslant x \leqslant 6$;

б) $y = \frac{6}{x+3}$, где $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

1013. Графиком функции $y = f(x)$, где $-3 \leqslant x \leqslant 5$, служит кривая, изображённая на рисунке 24. Найдите по графику:

а) значение функции y, если $x = -1; 2; 5$;

б) значение аргумента x, если $y = -1; 0; 2$;

в) область значений функции;

г) наибольшее значение функции;

д) наименьшее значение функции.

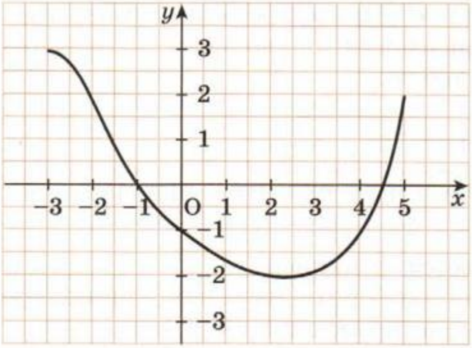


Рис. 24

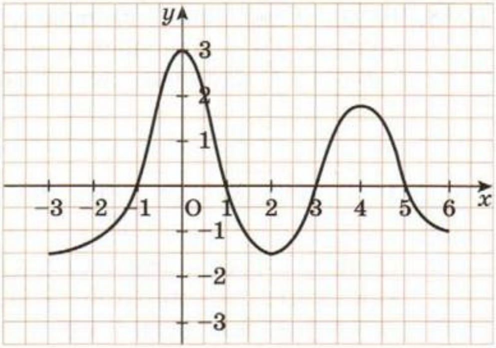


Рис. 25

1014. Функция $y = g(x)$, где $-3 \leqslant x \leqslant 6$, задана графиком, изображённым на рисунке 25. Найдите:

а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -2; 0; 2; 3,5;

б) значения аргумента, которым соответствует значение функции, равное 2; -1; 0;

в) два каких-нибудь значения аргумента, которым соответствуют положительные значения функции;

г) три каких-нибудь значения аргумента, которым соответствуют отрицательные значения функции;

д) значение аргумента, которому соответствует наименьшее значение функции;

е) значение аргумента, которому соответствует наибольшее значение функции.

1015. Графиком функции служит отрезок, координатами концов которого являются точки $(-3; -1)$ и $(7; 4)$. Начертите график и найдите по графику значения:

а) функции y, если $x = -1$; 1; 3; 5;

б) аргумента x, если $y = -1$; 2; 4.

1016. Постройте график функции, заданной следующим описанием:

а) каждому числу множества $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$ соответствует противоположное ему число;

б) каждому числу множества $\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 6\}$ соответствует обратное ему число.

1017. Функция задана описанием: каждому числу, принадлежащему множеству {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}, соответствует остаток от деления этого числа на 4. Постройте график этой функции. Запишите множество её значений.

1018. Вода в баке имеет температуру 15 °С. При нагревании температура воды y (°С) изменяется в зависимости от времени нагревания x (мин). Составили следующую таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	15	30	45	60	70	80	90	95	98	100	100	100	100

Почему зависимость y от x является функцией?

Постройте график этой функции (выберите масштаб: единице по оси x соответствует 1 мин, единице по оси y — 10 °С).

Используя график, выясните:

а) какую температуру имела вода через 3 мин; через 4,5 мин; через 9,5 мин после начала нагревания;

б) через сколько минут после начала нагревания температура стала равной 65 °С; 85 °С; 100 °С.

1019. Функция задана формулой $y = 4x - 5$. Принадлежит ли графику этой функции точка:

а) $A(2;\ 3)$; б) $B(-1;\ -9)$; в) $C(3;\ 10)$; г) $D(0;\ -5)$?

1020. Известно, что точка $A(2;\ -1)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Найдите k, если:

а) $f(x) = kx + 1$; в) $f(x) = 2kx^2 + 1$;

б) $f(x) = 2x + k$; г) $f(x) = |x - 3| + 2k$.

1021. На рисунке 26 изображён график изменения температуры воздуха в течение суток.

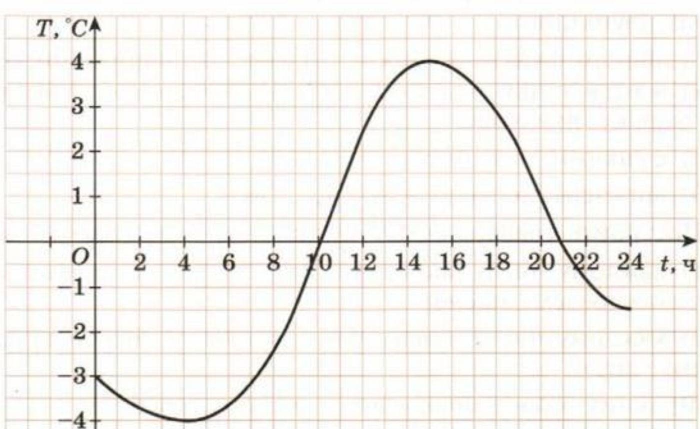


Рис. 26

Используя график, ответьте на вопросы:
а) в котором часу температура воздуха была равна 0 °С; в какие промежутки времени она была выше 0 °С; ниже 0 °С;
б) в какие промежутки времени температура понижалась; повышалась; когда она была самой высокой; самой низкой?

1022. На рисунке 27 изображён график зависимости массы канистры с бензином от объёма бензина.

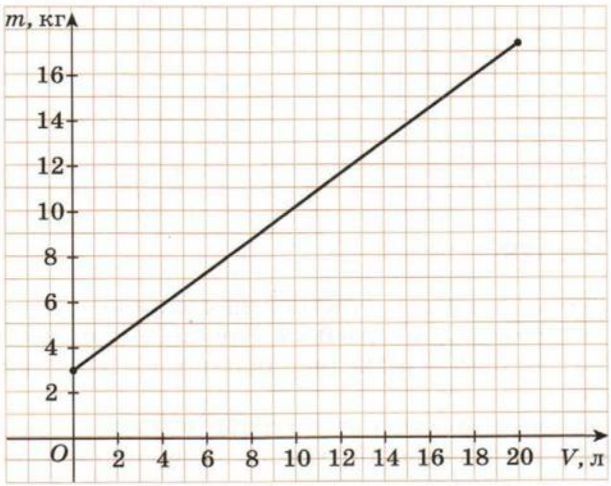


Рис. 27

Найдите по графику:
а) массу пустой канистры;
б) массу канистры с одним литром бензина;
в) массу одного литра бензина;
г) объём бензина в канистре, когда она наполнена бензином полностью.

1023. На рисунке 28 изображён график зависимости тормозного пути автомобиля на мокром асфальте от скорости его движения. Ответьте на следующие вопросы.
а) Чему равен тормозной путь автомобиля при скорости 50 км/ч?
б) Какое значение скорости не должен превышать автомобиль в дождь, чтобы его тормозной путь был не больше 40 м?

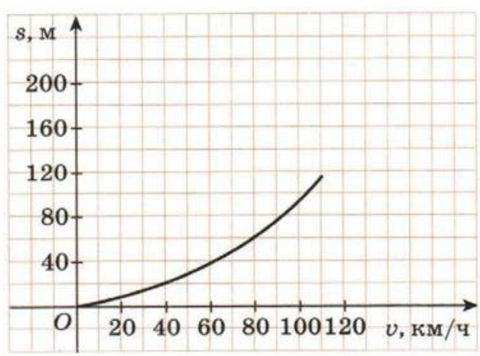


Рис. 28

1024. На рисунке 29 изображён график движения туриста, который отправился от станции к озеру, а затем возвратился на станцию.

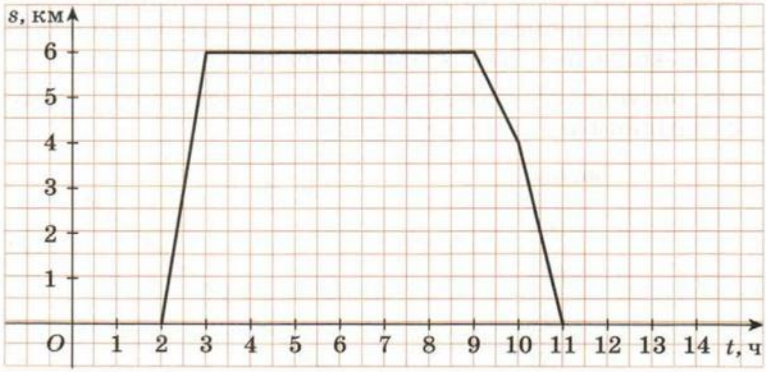


Рис. 29

Пользуясь графиком, ответьте на следующие вопросы.

а) В котором часу отправился турист от станции? Когда он прибыл к озеру? Сколько часов он провёл у озера? Когда возвратился на станцию?

б) С какой скоростью шёл турист до озера?

в) Какой была скорость туриста на различных участках пути, когда он шёл от озера до станции?

Упражнения для повторения

1025. Функция задана формулой $y = x^2 - 8x + 9$. Найдите:

а) значение функции при значении аргумента, равном 5; -2;

б) значения аргумента, которым соответствует значение функции, равное 2.

1026. Функция, область определения которой — множество однозначных чисел, задана описанием: каждому чётному числу x соответствует $\frac{x}{2}$, а каждому нечётному числу x соответствует $\frac{x}{3}$. Задайте эту функцию таблицей.

1027. Число посетителей кинотеатра в различные дни недели приведено в таблице.

Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота	Воскресенье
326	403	381	459	639	727	685

Найдите среднее арифметическое и медиану ряда данных (результаты округлите до целых).

1028. От пункта A до пункта B велосипедист ехал со скоростью 18 км/ч, а обратно он ехал со скоростью 12 км/ч. При этом путь из пункта B в пункт A занял у него на 1 ч больше, чем путь из пункта A в пункт B. Найдите расстояние между пунктами A и B.

1029. Решите уравнение:

а) $25x^3 - 9x = 0$; б) $x^5 - 81x = 0$.

36. Графическое представление статистических данных

Для изучения различных общественных и социально-экономических явлений, а также некоторых процессов, происходящих в природе, проводятся специальные статистические исследования. Всякое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе, а заканчивается обобщением и систематизацией полученных данных.

Для наглядного представления статистических данных используют их различные графические изображения. Одним из таких наглядных представлений являются *круговые диаграммы*. Рассмотрим пример.

В таблице представлены данные о площади океанов и суши на нашей планете.

Тихий океан	Атлантический океан	Индийский океан	Северный Ледовитый океан	Суша
179,7 млн км^2	93,4 млн км^2	79,9 млн км^2	13,1 млн км^2	148,9 млн км^2

Для построения по этим данным круговой диаграммы найдём центральные углы, соответствующие данным таблицы. Полный оборот радиуса вокруг центра круга составляет 360°, что соответствует всей поверхности Земли, т. е. 515 млн км^2. Тогда доля Тихого океана составит угол $\frac{360°}{515} \cdot 179{,}7 \approx 125°$. Аналогично найдём углы, показывающие долю каждого из океанов и долю суши от всей поверхности Земли (проделайте это самостоятельно). Построив эти углы в круге, получим круговую диаграмму площадей океанов и суши (рис. 30).

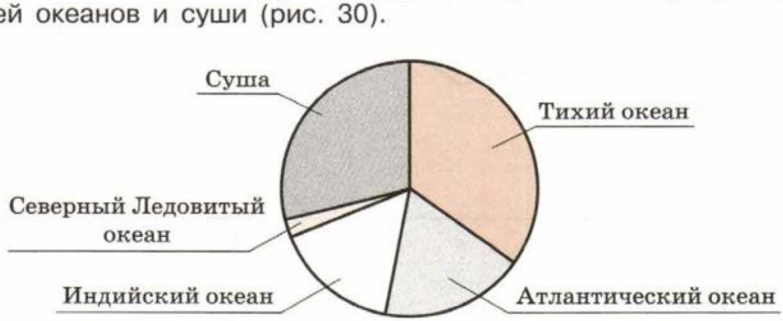


Рис. 30

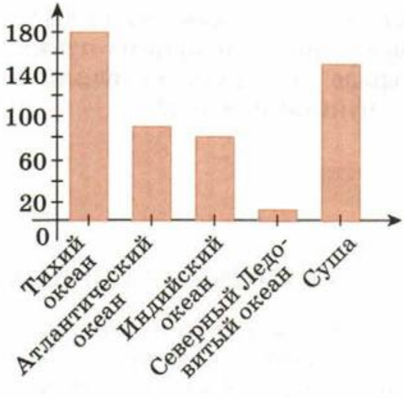


Рис. 31

Круговые диаграммы не всегда бывают удобными для анализа статистических данных, особенно если этих данных очень много и они близки по значению. В этом случае для наглядного представления данных используют *столбчатые диаграммы*. На рисунке 31 показана столбчатая диаграмма для рассмотренного примера об океанах и суше на нашей планете.

Для наглядного изображения динамики изменения статистических данных применяют ещё один вид графического представления данных — *полигон*. Для его иллюстрации рассмотрим другой пример.

В первом полугодии 2003 года завод получил прибыль в 5 млн рублей. Распределение прибыли по месяцам показано в таблице.

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Прибыль (млн р.)	0,7	0,6	0,9	1,1	1,0	0,7

В координатной плоскости на оси абсцисс будем отмечать номер месяца (январь — 1, февраль — 2 и т. д.), взяв в качестве единичного отрезка отрезок длиной 5 клеток. На оси ординат будем отмечать прибыль завода (в млн р.), взяв в качестве единичного отрезка отрезок длиной 10 клеток. Отметим точки (1; 0,7), (2; 0,6), (3; 0,9), (4; 1,1), (5; 1,0), (6; 0,7) и для наглядности соединим их последовательно отрезками (рис. 32). Полученная ломаная и есть полигон, показывающий распределение прибыли завода по месяцам.

Рис. 32

Вообще, если данные представлены в виде таблицы частот, то для построения полигона в координатной плоскости отмечают точки, абсциссами которых служат статистические данные, а ординатами — их частоты. Соединив последовательно эти точки отрезками, получают полигон распределения данных.

Упражнения

1030. Составьте таблицу частот, круговую диаграмму, столбчатую диаграмму и полигон ряда данных:

а) 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5;

б) 2; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5.

Найдите для каждого ряда данных объём, размах, среднее арифметическое, моду и медиану.

1031. На рисунке 33 приведена круговая диаграмма отметок Пети по биологии, полученных в течение четверти. Мама считает, что за четверть Петя получит двойку, папа полагает, что у сына в четверти будет «три», а сам Петя уверен, что его четвертная отметка — «четыре». Исходя из данных круговой диаграммы, составьте упорядоченный ряд данных и найдите все средние характеристики этого ряда. Какими из них пользовались мама, папа и Петя для обоснования своих выводов?

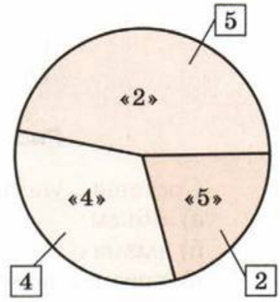


Рис. 33

1032. На рисунке 34 приведена столбчатая диаграмма распределения количества рабочих строительной бригады, имеющих различные квалификационные разряды. С помощью столбчатой диаграммы ответьте на вопросы.

а) Сколько рабочих имеют высший, 5-й разряд?

б) Сколько рабочих имеют 1-й разряд?

в) Каковы размах, объём и мода данного ряда?

г) Составьте таблицу частот упорядоченного ряда данных.

д) Найдите среднее арифметическое и медиану данного ряда.

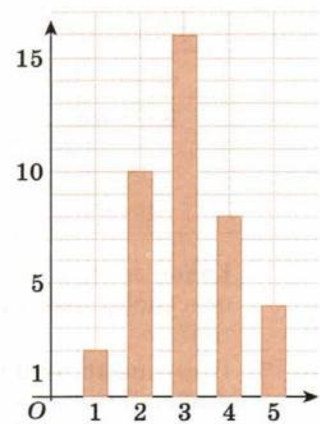


Рис. 34

1033. На рисунке 35 приведён полигон частот некоторого ряда данных.

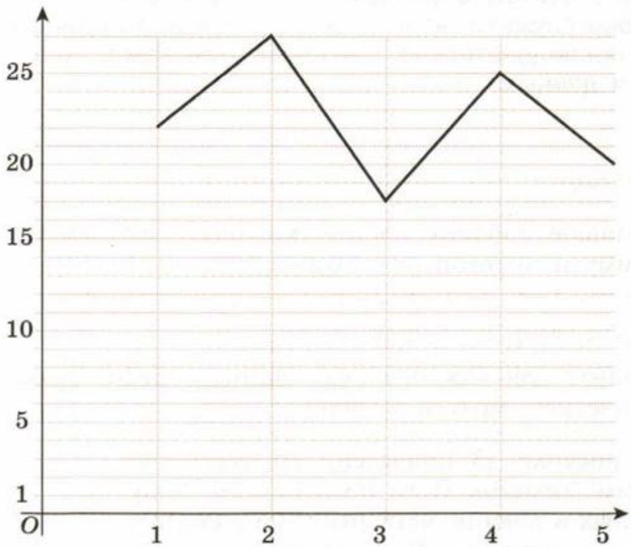


Рис. 35

Составьте упорядоченный ряд данных и найдите:
а) объём;
б) размах;
в) среднее арифметическое;
г) моду;
д) медиану.

1034. Мальчики 7 А класса посчитали, сколько раз за четверть их вызывали к доске. Получилась таблица:

Андреев	6	Елисеев	4
Борисов	8	Жуков	11
Васильев	5	Иванов	7
Грачёв	2	Крылов	3
Дятлов	12	Лебедев	10

Какое из графических представлений упорядоченного ряда данных целесообразно использовать для сравнительного анализа результатов?

1035. Посчитайте длину слов (количество букв) в приведённых ниже отрывках стихотворений А. С. Пушкина «И дале мы пошли — и страх обнял меня...» (1832) и «Я памятник себе воздвиг нерукотворный...» (1836). Постройте полигоны для полученных рядов данных.

***

И дале мы пошли — и страх обнял меня.
Бесёнок, под себя поджав своё копыто,
Крутил ростовщика у адского огня.
Горячий капал жир в копчёное корыто,
И лопал на огне печёный ростовщик.
А я: «Поведай мне: в сей казни что сокрыто?»
Виргилий мне: «Мой сын, сей казни смысл велик:
Одно стяжание имев всегда в предмете,
Жир должников своих сосал сей злой старик
И их безжалостно крутил на вашем свете...»

***

Я памятник себе воздвиг нерукотворный,
К нему не зарастёт народная тропа,
Вознёсся выше он главою непокорной
Александрийского столпа.
Нет, весь я не умру — душа в заветной лире
Мой прах переживёт и тленья убежит —
И славен буду я, доколь в подлунном мире
Жив будет хоть один пиит...

Упражнения для повторения

1036. Дана функция

$$f(x) = 4 - x^2.$$

Найдите $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$ и $f(1)$.

1037. Одно из двух натуральных чисел при делении на 5 даёт остаток 4, а другое — остаток 3. Какой остаток получится при делении на 5 произведения суммы и разности этих чисел?

1038. Разложите на множители:

а) $2a^2 + ab - 6b^2$; б) $4a^2 - 4ab - 3b^2$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение функции. Приведите пример функции, заданной формулой. Укажите независимую и зависимую переменные.

2. Какова область определения функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 - 8$; б) $y = \frac{7}{2x - 6}$?

3. Что называется графиком функции?

4. Начертите график какой-нибудь функции и покажите, как найти по графику:
   а) значение функции, соответствующее заданному значению аргумента;
   б) значения аргумента для указанного значения функции.
5. Как узнать, что точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции, заданной формулой $y = f(x)$?
6. Какие виды графического представления данных используются в статистике?

§ 15. Линейная функция

37. Прямая пропорциональность

В предыдущем параграфе мы познакомились с примерами функций, которые были заданы таблицей, формулой, описанием, графиком. В этом параграфе мы начинаем знакомиться с функциями, задаваемыми формулами, в которых правая часть — выражение определённого вида. Простейшей из них является функция, задаваемая формулой, в правой части которой — одночлен первой степени с одной переменной. Для этой функции ввели специальное название — *прямая пропорциональность*.

Определение. Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида

$$y = kx,$$

где x — независимая переменная, а k — не равное нулю число.

Функции, задаваемые формулами вида $y = kx$, где $k \neq 0$, находят широкое практическое применение. Приведём примеры.

Пример 1. Периметр p квадрата является функцией длины его стороны a. Функция, заданная формулой

$$p = 4a$$

(p и a выбираются в одинаковых линейных единицах), — прямая пропорциональность.

Из формулы $p = 4a$ следует, что отношение $\frac{p}{a}$ постоянно и равно 4 для любых пар соответственных значений переменных a и p. Например, если $a = 5$, то $p = 20$; если $a = 8$, то $p = 32$. Отсюда можно получить пропорцию $\frac{20}{5} = \frac{32}{8}$. Этим и объясняется название функции. Говорят, что периметр квадрата p *прямо пропорционален* длине стороны квадрата a.

Пример 2. Путь s км, пройденный автомобилем за t ч с постоянной скоростью 80 км/ч, вычисляется по формуле $s = 80t$, где $t > 0$, т. е. путь s прямо пропорционален времени движения t.

Пример 3. Стоимость p товара в рублях по цене 10 р. за килограмм вычисляется по формуле

$$p = 10x,$$

где x — масса товара в килограммах. Значит, зависимость p от x является прямой пропорциональностью.

Число k в формуле $y = kx$ называется *коэффициентом пропорциональности*.

Выясним, что представляет собой график прямой пропорциональности. Рассмотрим, например, функцию

$$y = 0{,}5x$$

и построим её график.

Область определения функции $y = 0{,}5x$ — множество всех чисел. Составим таблицу соответственных значений переменных x и y для некоторых значений аргумента x.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2

x	–0,5	–1	–1,5	–2	–2,5	–3	–3,5	–4
y	–0,25	–0,5	–0,75	–1	–1,25	–1,5	–1,75	–2

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице (рис. 36). Можно заметить, что отмеченные точки принадлежат некоторой прямой, проходящей через начало координат. Проведём эту прямую. Получим график функции $y = 0{,}5x$ (рис. 37).

Аналогично можно построить график прямой пропорциональности с другим коэффициентом k.

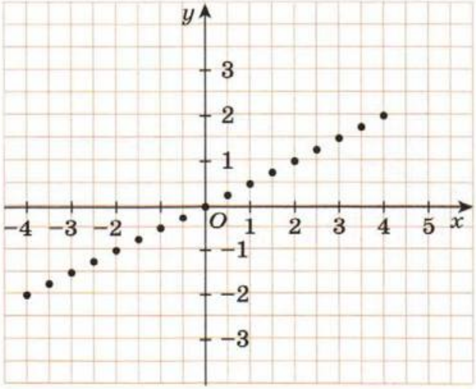


Рис. 36

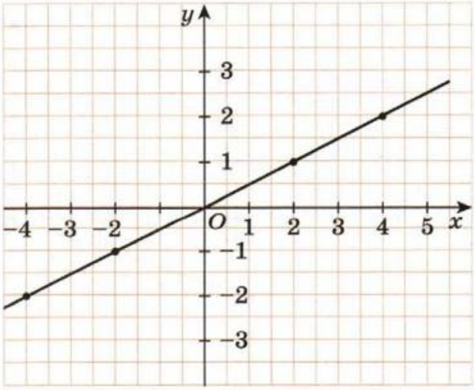


Рис. 37

На рисунке 38 изображён график функции $y = -2x$. Этот график, так же как и график функции $y = 0{,}5x$, является прямой и проходит через начало координат. Вообще

графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.

Чтобы построить график функции

$$y = kx,$$

достаточно отметить какую-нибудь точку графика, отличную от начала координат, и провести через эту точку и через начало координат прямую.

Построим, например, график функции

$$y = \frac{1}{3}x.$$

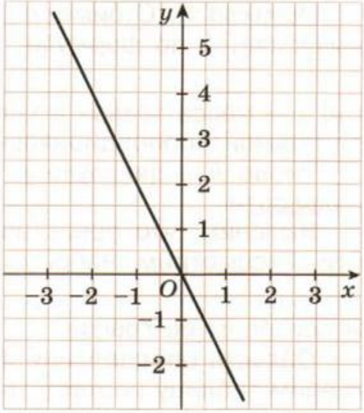


Рис. 38

Эта функция — прямая пропорциональность. Найдём координаты какой-нибудь точки графика, отличной от $O(0;\ 0)$. Пусть $x = 6$, тогда $y = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$. Отметим точку $K(6;\ 2)$ и проведём через неё и начало координат прямую (рис. 39). Эта прямая — график функции $y = \frac{1}{3}x$.

Заметим, что областью определения и областью значений прямой пропорциональности является множество всех чисел.

Оси координат делят координатную плоскость на четыре *<u>координатные четверти</u>*. Если $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, то точка $(x_0;\ y_0)$ принадлежит первой координатной четверти, если $x_0 < 0$, $y_0 > 0$, то точка $(x_0;\ y_0)$ принадлежит второй четверти, при $x_0 < 0$ и $y_0 < 0$ точка $(x_0;\ y_0)$ лежит в третьей чет-

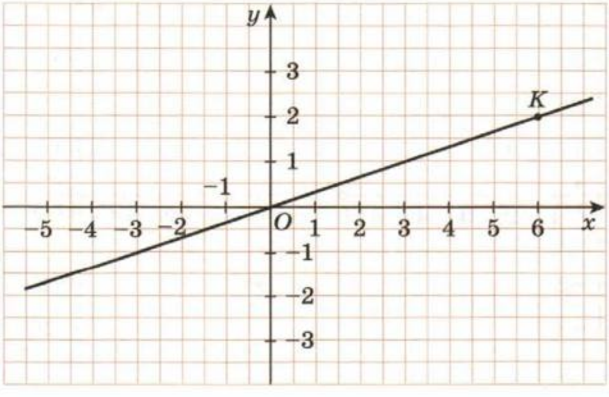


Рис. 39

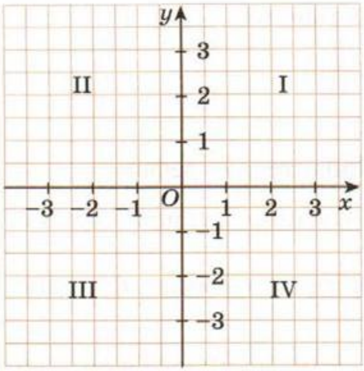


Рис. 40

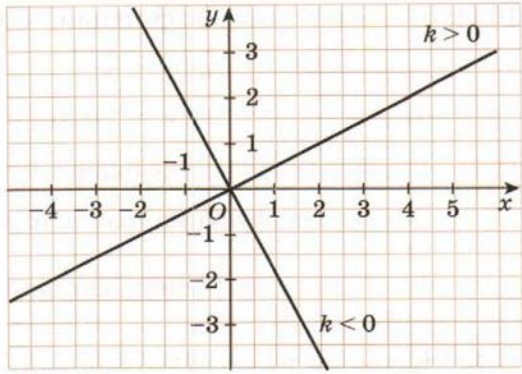


Рис. 41

верти, при $x_0 > 0$ и $y_0 < 0$ точка $(x_0;\ y_0)$ расположена в четвёртой четверти (рис. 40). Если хотя бы одна из координат точки равна нулю, то точка не лежит ни в одной из четвертей.

Расположение графика функции $y = kx$ в координатной плоскости зависит от коэффициента k. Если $x = 1$, то $y = k$. Значит, график функции $y = kx$ проходит через точку $(1;\ k)$. При $k > 0$ эта точка находится в первой координатной четверти, а при $k < 0$ — в четвёртой. Отсюда следует, что при $k > 0$ график функции $y = kx$ расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при $k < 0$ — во второй и четвёртой. На рисунке 41 построены графики прямой пропорциональности при различных значениях k.

Упражнения

1039. Является ли прямой пропорциональностью функция, заданная формулой:

а) $y = -3x$; г) $y = \frac{x}{3}$;

б) $y = \frac{1}{2}x$; д) $y = x^2$;

в) $y = \frac{4}{x}$; е) $y = x + 1$?

1040. Запишите формулу для вычисления массы m (в г) медного стержня длиной x м, зная, что масса одного метра этого стержня равна 890 г. Задаёт ли эта формула прямую пропорциональность?

1041. Почтовый голубь пролетел s км со скоростью 65 км/ч, затратив на весь путь t ч. Почему функция s от t является прямой пропорциональностью?

1042. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = \frac{1}{4}x$; в) $y = x$;

б) $y = -x$; г) $y = -0{,}5x$.

1043. Постройте график функции $y = -\frac{1}{3}x$. Найдите по графику:

а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -3; -1; 1; 3;

б) значение аргумента, которому соответствует значение функции, равное 2; 0; $-1{,}5$.

1044. Какие из точек $K(5;\ 12{,}5)$, $L(0{,}4;\ -0{,}16)$, $M(0;\ 0)$ принадлежат графику функции:

а) $y = 2{,}5x$;

б) $y = -0{,}4x$?

1045. При каком значении b точка $A(b + 1;\ 2 - b)$ принадлежит графику прямой пропорциональности:

а) $y = -2x$; в) $y = -x$;

б) $y = \frac{2}{3}x$; г) $y = x$?

1046. Какой координатной четверти принадлежит точка:

а) $A(-1;\ 100)$;

б) $B(-1;\ -100)$;

в) $C(100;\ -1)$;

г) $D(100;\ 1)$;

д) $M(m;\ 1 - m)$ при $m > 1$;

е) $N(n - 2;\ -n)$ при $n < 2$?

1047. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx$, если:

а) $k = 20$; в) $k = -1000$;

б) $k = -\frac{1}{7}$; г) $k = 0{,}001$?

1048. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x < 0, \\ -0{,}5x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $y = |x|$; в) $y = \frac{1}{2}|x|$.

1049. Известно, что график прямой пропорциональности проходит через точку $A(5;\ 223)$. Проходит ли этот график через точку:

$$B(-7;\ -315);\quad C\left(\frac{4}{7};\ 25{,}68\right);\quad D(1{,}24;\ 55{,}8)?$$

1050. Является ли прямой пропорциональностью функция, если известно, что её графиком является прямая, проходящая через точки:

а) $A(2{,}5;\ 3{,}75)$ и $B(-4{,}2;\ -6{,}3)$;

б) $C(-6{,}3;\ -2{,}1)$ и $D(12{,}6;\ 4{,}5)$?

1051. Постройте график функции $y = 100x$, выбрав масштаб: по оси x в 1 см — 1 единица, по оси y в 1 см — 50 единиц.

1052. Постройте график функции, выбрав соответствующий масштаб:

а) $y = 60x$; б) $y = \frac{1}{5}x$.

1053. Мотоциклист в течение 4 ч 30 мин ехал со скоростью 48 км/ч. Постройте график движения мотоциклиста, выбрав соответствующий масштаб.

1054. Улитка ползёт по стволу дерева в течение получаса со скоростью 0,25 м/мин. Постройте график движения улитки.

1055. Постройте график функции $y = 0{,}5x$, если областью определения функции является множество:

а) $\{x \mid -4 \leqslant x \leqslant 4\}$;

б) $\{x \mid x \geqslant 2\}$;

в) $\{x \mid x \leqslant -2\}$.

1056. Найдите область определения функции и постройте её график:

а) $y = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2}$; в) $y = \frac{2x - 6x^2}{3x - 1}$;

б) $y = \frac{2x^2 + 2x}{x + 1}$; г) $y = \frac{2x - 4x^2}{2x - 1}$.

1057. Велосипедист двигался полчаса со скоростью 0,2 км/мин. Постройте график движения велосипедиста. Используя график, ответьте на следующие вопросы.

а) Сколько километров проехал велосипедист за 10 мин? за 15 мин? за полчаса?

б) Какое время потребовалось велосипедисту, чтобы проехать 4 км? 5 км?

1058. На рисунке 42 изображены графики движения двух пешеходов. Используя график, ответьте на следующие вопросы.

а) Какое время в пути был первый пешеход? второй пешеход?

б) Какой путь прошёл первый пешеход? второй пешеход?

в) С какой скоростью шёл первый пешеход? второй пешеход?

г) Каким стало расстояние между пешеходами через 30 мин? через 1,5 ч?

д) Через сколько минут расстояние между пешеходами стало равным 2 км?

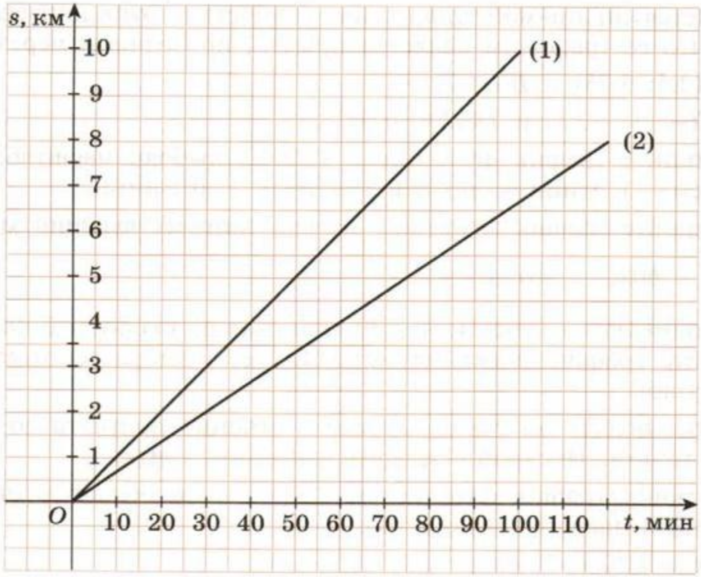


Рис. 42

1059. На рисунке 43 изображены графики прямой пропорциональности. Для каждого графика найдите коэффициент пропорциональности.

Упражнения для повторения

1060. Графиком функции служит ломаная $ABCD$, где $A(-3; -1)$, $B(0; 2)$, $C(3; -1)$, $D(6; 2)$. Постройте график этой функции. Найдите по графику значения аргумента, которым соответствует значение функции, равное:

а) 0; в) 1,5;

б) 1; г) $-\frac{1}{2}$.

Какое наибольшее значение принимает данная функция? Какое наименьшее значение принимает функция? Каковы область определения и область значений функции?

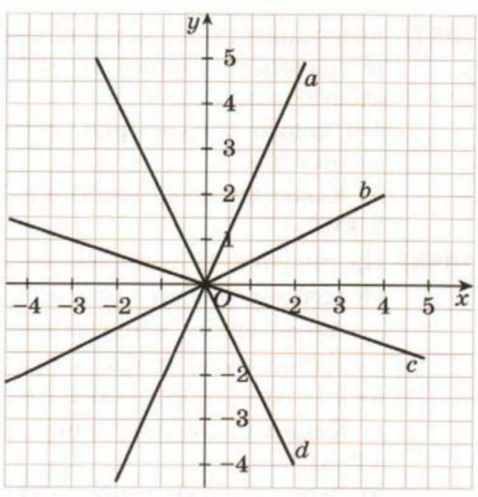


Рис. 43

1061. Постройте график функции

$$y = \frac{6}{x+3}, \text{ где } x \in \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}.$$

Почему эта функция не принимает отрицательных значений и не обращается в нуль?

1062. Решите уравнение:

а) $x^3 - 16x = 0$; б) $(x^2 - x - 2)(x + 2) = 0$.

38. Линейная функция и её график

Рассмотрим примеры функций, задаваемых формулой вида $y = kx + b$.

Пример 1. Автомобиль, выехавший из города A, в настоящий момент находится в посёлке B, удалённом от A на расстояние 30 км. Двигаясь со скоростью 60 км/ч, автомобиль за t ч пройдёт путь, равный $60t$ км, и будет находиться от города A на расстоянии, равном $60t + 30$ км. Обозначив выражение $60t + 30$ буквой s, получим формулу

$$s = 60t + 30,$$

где $t \geqslant 0$, которой задаётся функция.

Пример 2. Масса пустого бидона вместимостью 45 л равна 5 кг, а масса одного литра жидкости равна 0,9 кг. Тогда масса m (в кг) бидона, в котором содержится p л жидкости, равна $0{,}9p + 5$ кг.

Формулой

$$m = 0{,}9p + 5,$$

где $0 \leqslant p \leqslant 45$, задана функция.

В каждом из этих примеров мы имели дело с функциями, задаваемыми формулой, в правой части которой — многочлен первой степени с одной переменной. Если независимую переменную обозначить буквой x, а зависимую — буквой y, то формулу можно записать в виде $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа — коэффициенты двучлена. Такие функции называют *линейными*.

> **Определение. Линейной называется функция, которую можно задать формулой вида**
>
> $$\boldsymbol{y = kx + b},$$
>
> **где x — независимая переменная, k и b — любые числа.**

Частным случаем линейной функции является прямая пропорциональность. Действительно, при $b = 0$ и $k \neq 0$ формула $y = kx + b$ принимает вид $y = kx$, а этой формулой задаётся прямая пропорциональность.

Какой вид имеет график линейной функции? Чтобы выяснить это, рассмотрим линейную функцию $y = 0{,}5x + 3$ и при построении её графика воспользуемся графиком функции $y = 0{,}5x$.

Сравним соответственные значения функций $y = 0{,}5x$ и $y = 0{,}5x + 3$ при одинаковых значениях переменной x.

Из таблицы

x	-2	0	2	4	6
$0{,}5x$	-1	0	1	2	3
$0{,}5x + 3$	2	3	4	5	6

и формул $y = 0{,}5x$ и $y = 0{,}5x + 3$ видно, что для любого значения аргумента x значение функции $y = 0{,}5x + 3$ больше соответствующего значения функции $y = 0{,}5x$ на 3 единицы. Поэтому каждой точке графика функции $y = 0{,}5x$ соответствует точка графика функции $y = 0{,}5x + 3$ с той же абсциссой и ординатой, которая на 3 единицы больше. Причём на графике функции $y = 0{,}5x + 3$ других «лишних» точек нет. Это можно доказать методом от противного.

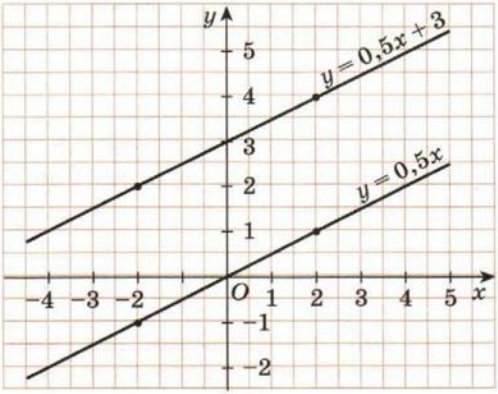


Рис. 44

Значит, график функции $y = 0{,}5x + 3$ может быть получен из графика функции $y = 0{,}5x$ сдвигом каждой его точки на 3 единицы вверх, т. е. в положительном направлении оси y. Следовательно, график функции $y = 0{,}5x + 3$ есть прямая, параллельная прямой $y = 0{,}5x$ и проходящая через точку (0; 3) (рис. 44).

Аналогично можно показать, что график функции $y = 2x - 1$ есть прямая, параллельная прямой $y = 2x$ и проходящая через точку (0; -1), т. е. сдвинутая на единицу вниз (в направлении, противоположном положительному направлению оси y) (рис. 45).

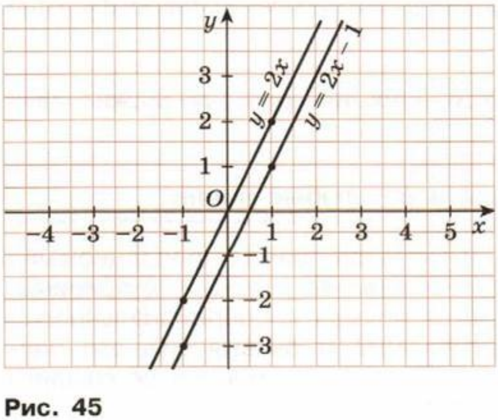


Рис. 45

Вообще график функции

$$y = kx + b,$$

где $k \neq 0$, есть прямая, параллельная прямой $y = kx$.

Если $k = 0$, то формула

$$y = kx + b$$

принимает вид $y = 0x + b$, т. е. $y = b$. Значит, линейная функция $y = kx + b$ при $k = 0$ принимает при любом x одно и то же значение.

Построим, например, график функции $y = -3$.

Множество точек вида $(x; -3)$ есть прямая, параллельная оси x и проходящая через точку (0; –3) на оси y (рис. 46).

Таким образом,

графиком линейной функции является прямая.

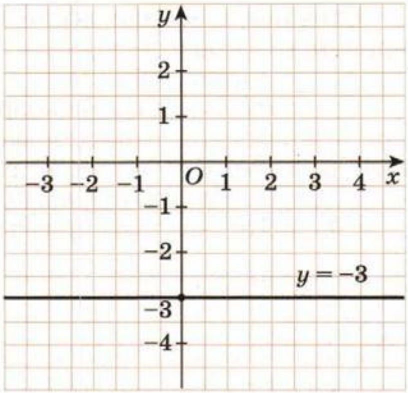


Рис. 46

Заметим, что областью определения линейной функции $y = kx + b$ является множество всех чисел, а областью значений — либо множество всех чисел, либо число b (при $k = 0$).

Чтобы построить график линейной функции, достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки и провести через них прямую.

Пример 3. Построим график функции

$$y = 2x - 3.$$

Функция $y = 2x - 3$ является линейной. Значит, её график — прямая.

Возьмём два произвольных значения аргумента x, например, $x = 0$ и $x = 4$, и вычислим соответствующие им значения функции:

если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$;

если $x = 4$, то $y = 2 \cdot 4 - 3 = 5$.

Отметим точки $A(0; -3)$ и $B(4; 5)$ на координатной плоскости и проведём через них прямую (рис. 47).

Прямая AB — график функции

$$y = 2x - 3.$$

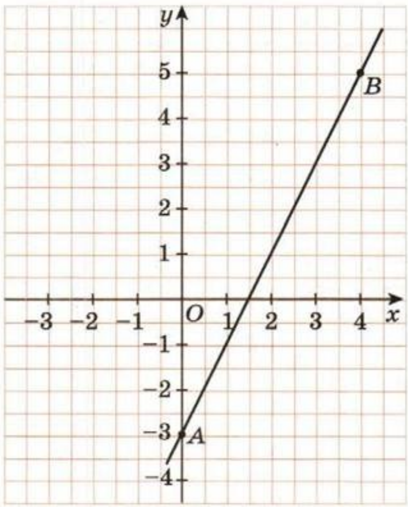


Рис. 47

Пример 4. Построим график функции

$$y = -x + 2, \text{ где } -3 \leqslant x \leqslant 5.$$

График линейной функции, заданной формулой $y = -x + 2$, — это прямая. График данной функции — часть прямой, ограниченная точками C и D с абсциссами –3 и 5.

Вычислим ординаты точек C и D:

если $x = -3$, то $y = -(-3) + 2 = 5$;

если $x = 5$, то $y = -5 + 2 = -3$.

Отметим в координатной плоскости точки $C(-3;\ 5)$ и $D(5;\ -3)$ и соединим их отрезком прямой. Получим график функции $y = -x + 2$, где $-3 \leqslant x \leqslant 5$ (рис. 48).

Заметим, что областью определения функции $y = 2x - 3$, рассмотренной в примере 3, является множество всех чисел, а областью определения функции $y = -x + 2$, рассмотренной в примере 4, — промежуток $-3 \leqslant x \leqslant 5$. Поэтому графиком первой функции является прямая (точки A и B лежат на этой прямой), а графиком второй — отрезок (точки C и D — граничные точки отрезка). Таким образом, для построения графика функции важно знать, какова её область определения.

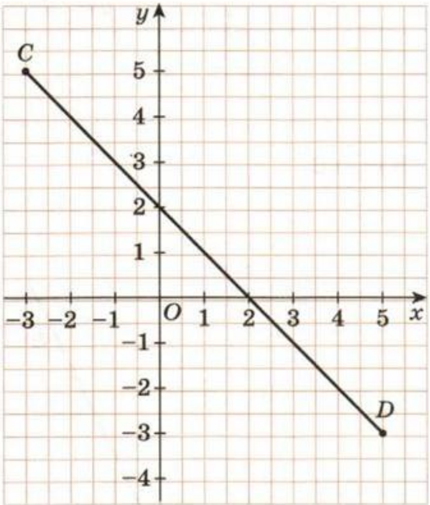


Рис. 48

При построении графика линейной функции, как и любой другой функции, важно знать точки пересечения графика с осями координат.

Пример 5. Найдём точки пересечения графика функции $y = -2x + 4$ с осями координат и построим график.

Абсцисса любой точки, лежащей на оси ординат, равна нулю, следовательно, для того чтобы найти точку пересечения графика функции $y = -2x + 4$ с осью y, нужно подставить вместо x число 0:

$$y = -2 \cdot 0 + 4 = 4.$$

Ордината любой точки, лежащей на оси абсцисс, равна нулю, следовательно, для того чтобы найти точку пересечения графика функции $y = -2x + 4$ с осью x, нужно подставить 0 вместо y:

$$0 = -2x + 4,$$
$$2x = 4,$$
$$x = 2.$$

Итак, точки пересечения с осями:

с осью x — $M(2;\ 0)$,

с осью y — $N(0;\ 4)$.

Отметим эти точки в координатной плоскости и проведём через них прямую (рис. 49). Прямая MN — график функции $y = -2x + 4$.

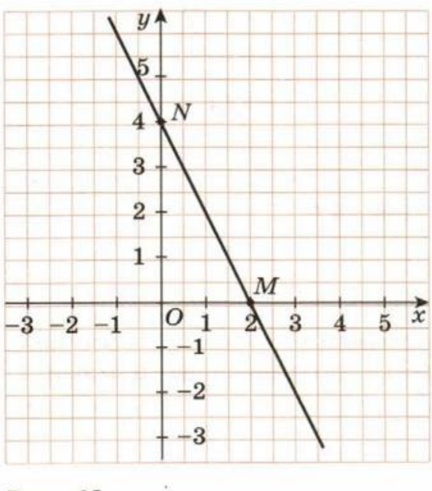


Рис. 49

Упражнения

1063. Является ли линейной функция, заданная формулой:

а) $y = 10x + 8$; г) $y = \frac{3}{x} + 1$;

б) $y = 0{,}1 - 0{,}3x$; д) $y = 2x^2 + 4$;

в) $y = \frac{x}{3} + 2$; е) $y = \frac{17x - 25}{10}$?

1064. Линейная функция задана формулой $y = 10x + 1$. Найдите:

а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 2; $-3{,}5$; $1{,}8$; 0;

б) значение аргумента, которому соответствует значение функции, равное 46; -4; 0; 1.

1065. Постройте график линейной функции:

а) $y = 0{,}5x - 2$; г) $y = -2x - 1$;

б) $y = 0{,}5x + 3$; д) $y = \frac{1}{3}x - 1$;

в) $y = -2x + 3$; е) $y = 1\frac{1}{3}x + 1$.

1066. Постройте график линейной функции:

а) $y = x - 2$; г) $y = -0{,}5x - 1$;

б) $y = x + 3$; д) $y = 3x - 4$;

в) $y = -0{,}5x + 2$; е) $y = \frac{1}{4}x + 5$.

1067. Постройте график функции:

а) $y = 0{,}5x + 1$, где $-4 \leqslant x \leqslant 4$;

б) $y = 0{,}5x + 1$, где $x \geqslant 0$;

в) $y = 0{,}5x + 1$, где $x \leqslant 2$;

г) $y = 0{,}5x + 1$, где $x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$.

1068. Найдите область определения и область значений и постройте график функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x}$; в) $f(x) = \frac{25 - 4x^2}{2x + 5}$;

б) $f(x) = \frac{9x^2 - 4}{2 - 3x}$; г) $f(x) = \frac{25 + 20x + 4x^2}{2x + 5}$.

1069. Не выполняя построения графика функции $y = 1{,}5x + 10$, выясните, проходит ли этот график через точку:

$A(10; 25)$; $C(4; -4)$; $E(-100; 1490)$;

$B(-2; 7)$; $D(100; 160)$; $F(0; 10)$.

1070. При каких значениях a точка $A(a;\ 2a-1)$ принадлежит графику функции:

а) $y = -2x + 3$; в) $f(x) = 3x - 1$;

б) $y = -x + 5$; г) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$?

1071. График линейной функции проходит через точку $B(-1;\ 0{,}5)$. Найдите число k, если функция имеет вид:

а) $y = kx - 3$; б) $f(x) = kx + 1$.

1072. Найдите координаты точек пересечения графика функции с осями координат:

а) $y = 1{,}2x - 6$; г) $y = 0{,}01x - 1$;

б) $y = -\frac{1}{4}x + 2$; д) $y = \frac{2}{7}x - \frac{1}{3}$;

в) $y = 2{,}7x + 3$; е) $y = -87{,}5x - 5$.

1073. Постройте график функции:

а) $y = -2$;

б) $y = 1$;

в) $y = 2{,}5$;

г) $y = -1{,}5$.

1074. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 1{,}5x, & \text{если } x \geqslant 2, \\ -1{,}5x, & \text{если } x \leqslant -1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < -2, \\ 1, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

1075. Постройте график функции $y = 50x - 100$, выбрав следующий масштаб: по оси x — 1 см соответствует 1 единице, по оси y — 1 см соответствует 100 единицам. Найдите по графику:

а) значение y, если $x = 1{,}5;\ -0{,}5;\ 3{,}5$;

б) значение x, при котором $y = 100;\ -150;\ -250$.

1076. Железный стержень при температуре $t = 0\ °C$ имеет длину $l = 10$ м. При изменении температуры его длина меняется по закону

$$l = 10(1 + 0{,}000012t),$$

где $-100 < t < 200$. Выясните:

а) какую длину имеет стержень при $t = 0\ °C;\ 50\ °C;\ -50\ °C$;

б) на сколько миллиметров удлинится стержень, если его температура повысится от $-20\ °C$ до $80\ °C$.

Упражнения для повторения

1077. Упростите выражение:

а) $(2 - (3 - x)^2)^2 - (2 + (x - 3)^2)^2$;

б) $(3 - (2 - a)^2)^2 - (3 + (a - 2)^2)^2$.

1078. В каких координатных четвертях проходит график прямой пропорциональности, если этому графику принадлежит точка:

а) $A(-1; 4)$;

б) $B\left(-\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}\right)$;

в) $C(1{,}25; -1{,}25)$?

Чему равен коэффициент пропорциональности во всех случаях?

1079. Известно, что размах ряда равен 1, а его медиана равна 2. Может ли его мода быть равна:

а) 2; б) 4; в) 1?

1080. В 7 классе Федя отлично знает французский язык, Нина и Наташа — немецкий язык, Аня, Андрей и Алексей — английский язык. На олимпиаду по иностранным языкам нужно отправить команду из трёх человек, в составе которой должны быть учащиеся, знающие французский, немецкий и английский языки. Сколькими способами можно составить такую команду учащихся?

39. Взаимное расположение графиков линейных функций

Расположение графика функции

$$y = kx + b$$

на координатной плоскости зависит от значения коэффициентов k и b.

Как зависит расположение графика от коэффициента b? Если $x = 0$, то $y = b$. Значит, график линейной функции $y = kx + b$ (при любых значениях k и b) проходит через точку $(0; b)$.

От коэффициента k зависит угол, который образует прямая $y = kx + b$ с осью x. Например, прямая $y = kx + b$ при $k = 1$ наклонена к оси x под углом, равным 45° (рис. 50). Это следует из того, что прямая $y = x$ совпадает

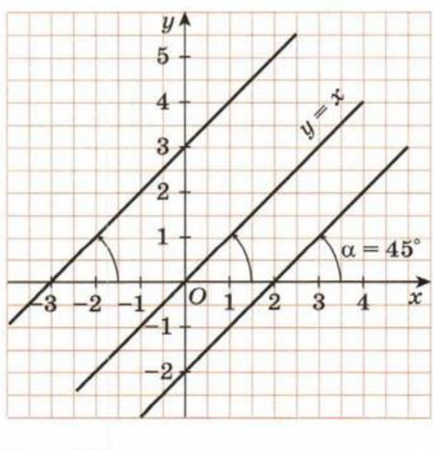


Рис. 50

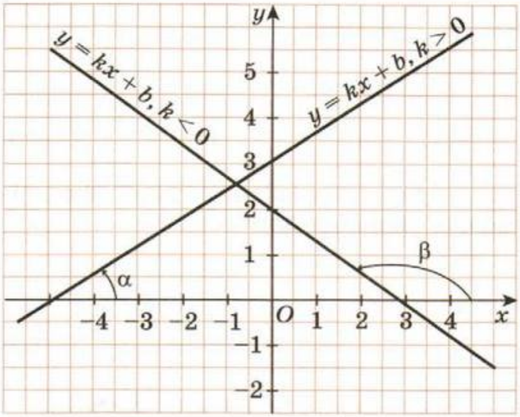


Рис. 51

с биссектрисами первого и третьего координатных углов. Если $k > 0$, то угол наклона прямой $y = kx + b$ к оси x острый; если $k < 0$, то этот угол тупой (рис. 51). Поэтому коэффициент k называют <u>угловым коэффициентом</u> прямой — графика функции $y = kx + b$.

Выясним, каково взаимное расположение графиков двух линейных функций

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2x + b_2$$

на координатной плоскости. Графики этих функций — прямые. Они могут пересекаться, т. е. иметь только одну общую точку, или быть параллельными, т. е. не иметь общих точек.

Если $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются, так как первая из них параллельна графику прямой пропорциональности $y = k_1x$, а вторая — графику прямой пропорциональности $y = k_2x$, а этими графиками являются две пересекающиеся прямые.

Если $k_1 = k_2$, то прямые параллельны, так как каждая из них параллельна графику прямой пропорциональности $y = kx$, где $k = k_1 = k_2$.

Заметим, что случай, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, мы не рассматриваем, так как речь идёт о графиках двух различных функций, а при этом условии прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ совпадают.

Итак, для любых двух линейных функций справедливо утверждение:

если угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками линейных функций, различны, то прямые пересекаются,
если же угловые коэффициенты прямых одинаковы, то прямые параллельны.

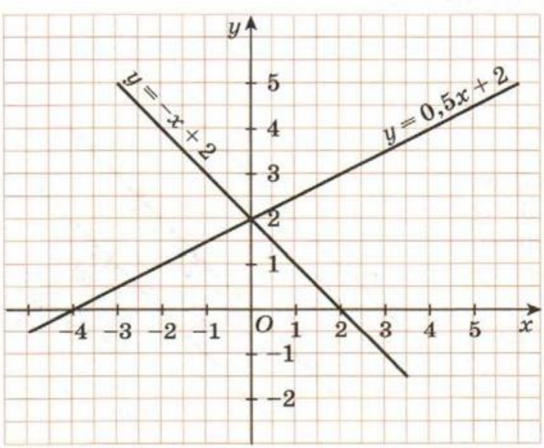


Рис. 52

На рисунке 52 изображены графики линейных функций с различными угловыми коэффициентами и одинаковым значением b, равным 2. Эти графики пересекаются в точке (0; 2).

На рисунке 53 изображены графики линейных функций с одинаковыми угловыми коэффициентами и различными значениями b. Эти прямые параллельны друг другу.

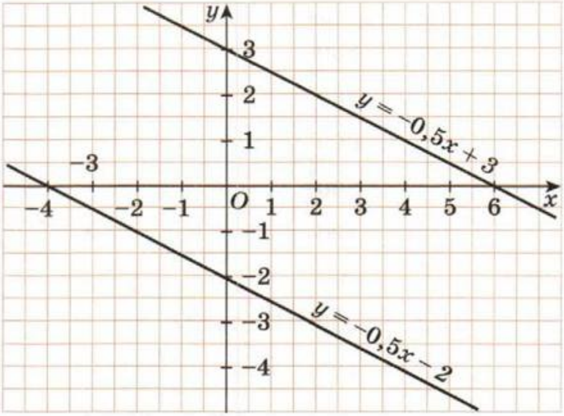


Рис. 53

Пример 1. Найдём координаты точки пересечения графиков функций

$y = -3x + 1$ и $y = x - 3$.

Будем рассуждать так: пусть точка $M(x_0; y_0)$ — искомая точка пересечения графиков данных функций. Тогда её координаты удовлетворяют как первому, так и второму уравнению. Значит, $y_0 = -3x_0 + 1$ и $y_0 = x_0 - 3$ — верные числовые равенства. Отсюда получаем

$$-3x_0 + 1 = x_0 - 3.$$

Тогда $-4x_0 = -4$ и $x_0 = 1$.

Подставив найденное значение $x_0 = 1$ в равенство $y_0 = -3x_0 + 1$ или в равенство $y_0 = x_0 - 3$, получим $y_0 = -2$. Таким образом, точка пересечения графиков данных функций имеет координаты (1; –2).

Заметим, что часто неизвестные координаты не обозначают другими символами. В этом случае решение выглядит так:

$$-3x + 1 = x - 3,$$
$$-4x = -4,$$
$$x = 1,$$
$$y = 1 - 3 = -2$$
$$(\text{или } y = -3 \cdot 1 + 1 = -2).$$

Ответ: $(1; -2)$.

Пьер Ферма (1601—1665), французский математик, занимался теорией чисел, геометрией, алгеброй, математическим анализом, теорией вероятностей; параллельно с Р. Декартом разрабатывал основы аналитической геометрии.

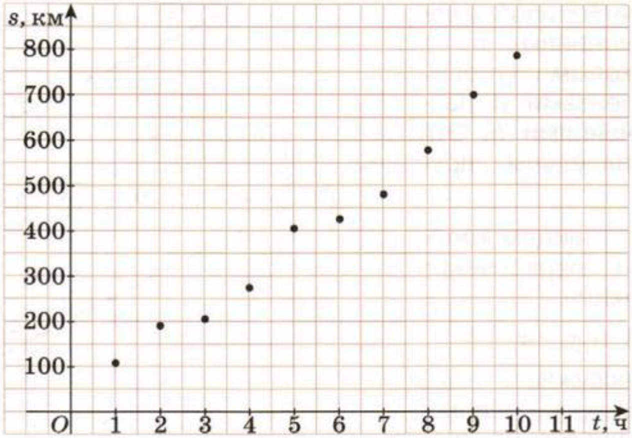


Рис. 54

Линейная функция часто используется в статистике. Рассмотрим пример.

Автомобиль проехал за 10 ч расстояние, равное 800 км. Каждый час фиксировалось расстояние от пункта отправления до автомобиля. После этого полученные данные отметили в координатной плоскости (рис. 54).

Полученные данные достаточно разбросаны, отмеченные точки не лежат на одной прямой, поскольку на разных участках дороги автомобиль двигался с разной скоростью. Однако все отмеченные точки группируются около так называемой *аппроксимирующей* прямой (от латинского слова *proxima* — «приближение»).

Чтобы её построить, можно приложить к чертежу линейку и провести наиболее подходящую прямую, содержащую вблизи себя все отмеченные точки (рис. 55). Проведённая прямая позволяет прогнозировать, где может оказаться автомобиль через 11, 12 ч и т. д. после начала своего движения.

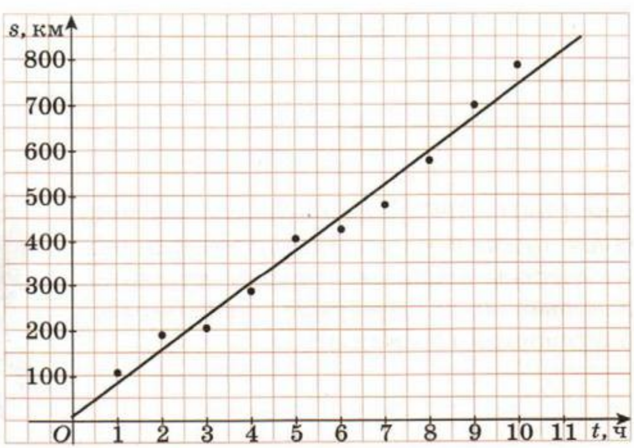


Рис. 55

Заметим, что в статистике существуют специальные методы расчётов аппроксимирующих прямых, но и рассмотренный метод даёт вполне разумное приближение.

Упражнения

1081. Постройте в одной и той же системе координат графики функций:

а) $y = x + 4$, $y = -0{,}5x + 4$, $y = 4$;

б) $y = 0{,}5x + 2$, $y = 0{,}5x$, $y = 0{,}5x - 1$.

1082. Даны функции:

$$y = 0{,}8x + 2, \quad y = 15 - 1{,}5x,$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 6, \quad y = \frac{4}{5}x - 19, \quad y = 1{,}5x - 15.$$

Назовите те из них, графики которых:

а) параллельны; б) пересекаются.

1083. Дана функция $y = \frac{1}{4}x + 9$. Задайте формулой какую-нибудь линейную функцию, график которой:

а) параллелен графику данной функции;

б) пересекает график данной функции.

1084. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = -29x + 21$;

б) $y = -29x - 21$;

в) $f(x) = 29x + 21$;

г) $h(x) = 29x - 21$?

1085. Линейная функция задана формулой

$$y = \frac{2}{5}x - 7.$$

Докажите, что график этой функции параллелен графику функции:

а) $y = \frac{2}{5}x + 83$; в) $y = \frac{2x}{5}$;

б) $y = 0{,}4x + 3$; г) $y = \frac{4x - 1}{10}$.

1086. Задайте формулой прямую пропорциональность, график которой параллелен графику функции:

а) $y = -3x + 2$; в) $f(x) = \frac{17}{18}x - \frac{7}{8}$;

б) $y = 4x + 17$; г) $g(x) = -0{,}4x - 0{,}05$.

1087. Докажите, что график функции $y = 4{,}5x - 7$ пересекает график функции:

а) $y = 6x - 1$;

б) $y = 11 - 2{,}5x$;

в) $y = \frac{6x}{5}$;

г) $y = \frac{8 - 12x}{3}$.

Найдите координаты точки пересечения.

1088. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:

а) $y = 5x - 7$ и $y = 3x + 1$;

б) $y = -3x + 2$ и $y = 8x - 9$;

в) $y = 0{,}4x - 5$ и $y = -0{,}1x - 3$;

г) $y = 23x - 6$ и $y = -2x + 9$;

д) $y = 98x$ и $y = -102x - 3$;

е) $y = -3$ и $y = 36x + 1$.

1089. На рисунке 56 изображены графики линейных функций $y = kx + b$. Для каждого графика определите:

а) значение b; б) значение k.

1090. На рисунке 57 построены графики линейных функций. Задайте каждую из этих функций формулой.

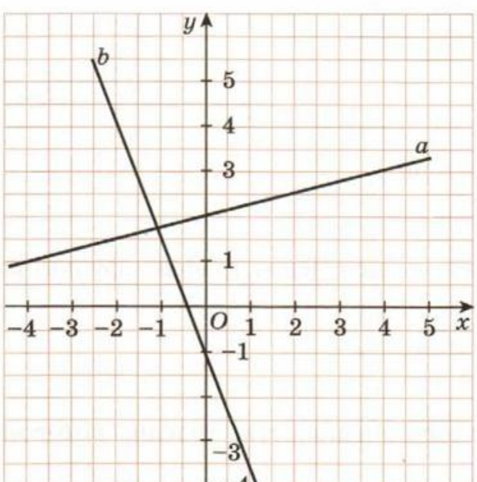


Рис. 56

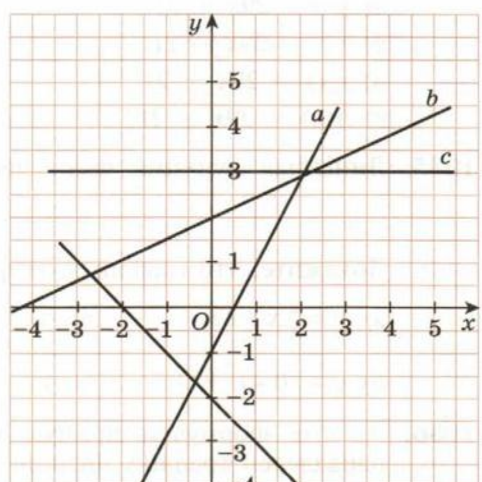


Рис. 57

1091. Задайте формулой линейную функцию, если её график не пересекает прямую $y = -2x + 1$ и проходит через точку:

а) $A(0;\ 3)$; б) $B(0;\ -2)$.

1092. Отметьте в координатной плоскости данные статистического исследования, результаты которого приведены в таблице, и проведите аппроксимирующую прямую для результатов данного исследования.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4,5	4,9	5,2	5,5	5,9	5,8	6,7	6,9	7,4	7,9	8,0	8,8	9,6

1093. При каком значении k график функции $y = kx + 8$ проходит через точку:

а) $A(1;\ 12)$; б) $B(-2;\ 0)$; в) $C(0;\ 8)$?

1094. При каком значении b график функции $y = 7x + b$ проходит через точку:

а) $K(-1;\ 1)$; б) $L(9;\ 0)$; в) $M(0;\ 25)$?

Упражнения для повторения

1095. Разложите на множители многочлен:

а) $a^{12} - a^6 + a^3 - 1$; б) $b^6 + b^4c^2 - b^2 - c^2$.

1096. Найдите значение выражения:

$$(2 + 5) + (2^2 + 5^2) + (2^3 + 5^3) + (2^4 + 5^4).$$

1097. Докажите тождество:

а) $a^2(a + 3b) + b^2(b + 3a) = (a + b)^3$;

б) $(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + b^3$.

1098. Докажите, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел кратно 8.

? Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется прямой пропорциональностью? Приведите пример.
2. Что представляет собой график прямой пропорциональности?
3. Какая функция называется линейной и каков её график?
4. При каком условии графики двух линейных функций пересекаются? параллельны?
5. Под каким углом (острым или тупым) наклонена прямая (график функции $y = kx + b$) к оси x, если:

   а) $k > 0$; б) $k < 0$?

§ 16. Степенная функция с натуральным показателем

40. Функция $y = x^2$. Степенная функция с чётным показателем

При нахождении площади S квадрата со стороной a мы пользуемся формулой

$$S = a^2, \text{ где } a > 0,$$

а при отыскании объёма V куба с ребром a — формулой

$$V = a^3, \text{ где } a > 0$$

(значения a измеряют в линейных единицах, а значения S и V — соответственно в квадратных и кубических единицах).

Этими формулами задаются функции S от a и V от a.

Функции, задаваемые формулами

$$y = x,\ y = x^2,\ y = x^3,\ y = x^4,\ y = x^5 \text{ и т. д.,}$$

называются степенными функциями.

Каждую из них можно получить из формулы

$$y = x^n,$$

если вместо n подставлять натуральные числа. Поэтому степенной функцией с натуральным показателем называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = x^n$, где x — независимая переменная, а n — определённое натуральное число.

Выражение x^n, где n — натуральное число, имеет смысл при любом x. Поэтому область определения степенной функции с натуральным показателем есть множество всех чисел.

Рассмотрим теперь функцию $y = x^2$. Сначала выясним некоторые свойства этой функции, а затем построим её график.

1) При значении аргумента, равном нулю, значение функции также равно нулю.

Действительно, если $x = 0$, то $y = 0^2 = 0$.

Значит, точка (0; 0) принадлежит графику функции, т. е. график проходит через начало координат.

2) При любом значении аргумента, отличном от нуля, функция принимает положительное значение.

Покажем это. Квадрат всякого не равного нулю числа положителен: если $x \neq 0$, то $x^2 > 0$, т. е. $y > 0$.

Из этого свойства следует, что все точки графика, кроме точки (0; 0), расположены выше оси x.

3) Любым противоположным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции.

Действительно, при любом x значения x и $-x$ являются противоположными числами, но в то же время $x^2 = (-x)^2$.

Отсюда следует, что точки графика функции, имеющие противоположные абсциссы, симметричны относительно оси y (они лежат на одном перпендикуляре к оси y, по разные стороны от этой оси и на равном от неё расстоянии).

Теперь построим график функции.

Учитывая, что график функции $y = x^2$ проходит через начало координат и что противоположным значениям x соответствует одно и то же число, составим таблицу лишь для положительных значений аргумента.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0,25	1	2,25	4	6,25	9

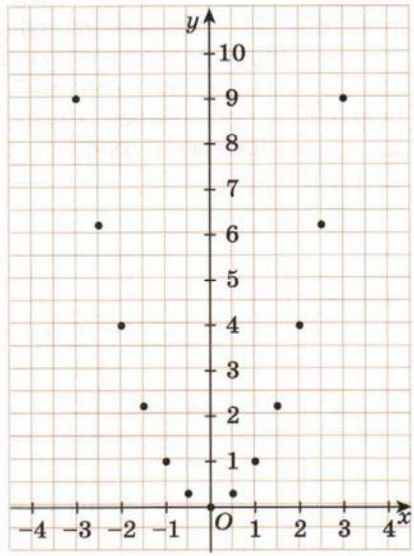


Рис. 58

Отметим на координатной плоскости точку (0; 0), точки, координаты которых указаны в таблице, и точки с отрицательными абсциссами, противоположными положительным (занесённым в таблицу) (рис. 58).

Чтобы точнее построить график вблизи начала координат, вычислим ещё несколько значений функции.

x	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,01	0,04	0,09	0,16

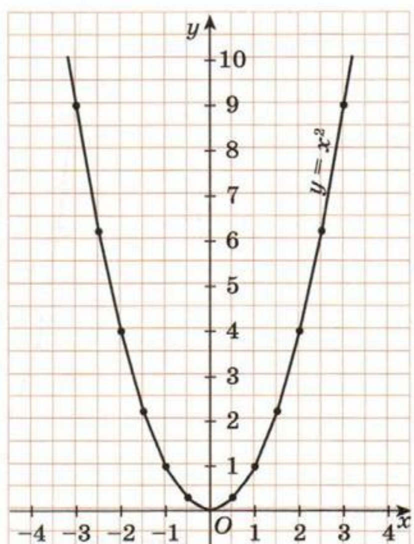


Рис. 59

Из этой таблицы видно, что при $0 \leqslant x \leqslant 0{,}3$ график почти сливается с осью x.

Через отмеченные точки проведём плавную непрерывную линию. Получим график функции $y = x^2$ (рис. 59). Ясно, что построенная на рисунке кривая неограниченно продолжается вверх (как справа от оси y, так и слева от неё).

График функции $y = x^2$ называют <u>параболой</u>.

Заметим, что функция $y = x^4$ (и вообще функция $y = x^n$, где n — чётное число) обладает такими же свойствами, как и функция $y = x^2$. График функции $y = x^4$ имеет такой же вид, как и график функции $y = x^2$ (рис. 60). Его отличие от графика функции $y = x^2$ проявляется лишь в том, что при достаточно малых по модулю значениях x кривая более плотно, чем график функции $y = x^2$, прилегает к оси x. При $x > 1$ график функции $y = x^4$ более круто поднимается вверх (в этом случае кривая расположена выше графика функции $y = x^2$).

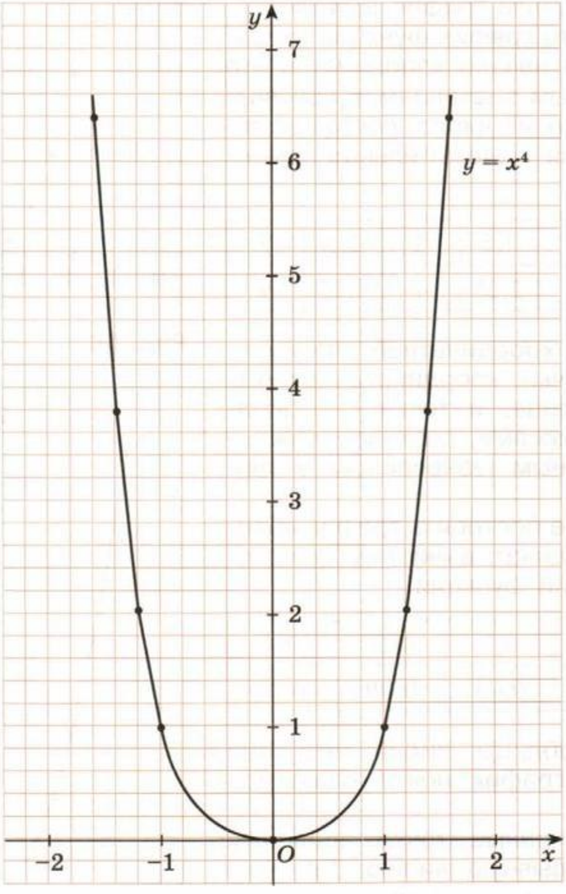


Рис. 60

Упражнения

1099. Пользуясь графиком функции $y = x^2$, изображённым на рисунке 59, найдите:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 0,7; 1,3; 2,2; 3,1; $-0,7$; $-1,3$; $-2,2$;

б) значения x, которым соответствует $y = 0,5$; 2,5; 6,5; 8,5;

в) множество значений x, при которых значения функции меньше 1; меньше 4; больше 1; больше 4.

1100. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -2x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

1101. Докажите, что графику функции $y = x^2$ принадлежит точка:

а) $A(12; 144)$; б) $B(-102; 10\,404)$; в) $C(2025; 4\,100\,625)$.

1102. Постройте график функции $S = a^2$, где a — длина стороны квадрата (в см), а S — площадь квадрата (в см^2). Чем этот график отличается от графика функции $y = x^2$?

1103. Как изменится площадь квадрата, если его сторону:

а) увеличить в 2 раза; в 5 раз; в 10 раз; в n раз, где $n > 1$;

б) уменьшить в 3 раза; в 6 раз; в 15 раз; в m раз, где $m > 1$?

1104. Как надо изменить сторону квадрата, чтобы его площадь:

а) уменьшилась в 25 раз; в 100 раз;

б) увеличилась в 9 раз; в 64 раза?

1105. Сравните значения степеней, не выполняя вычислений:

а) $0,6^2$ и $0,7^2$; в) $(-0,8)^2$ и $(-0,9)^2$;

б) $1,2^2$ и $1,12^2$; г) $(-2,35)^2$ и $(-2,41)^2$.

1106. Используя график функции $y = x^2$ (см. рис. 59), решите уравнение:

а) $x^2 = 4$; б) $x^2 = 5$; в) $x^2 = 0,7$; г) $x^2 = 7$.

1107. Принадлежит ли графику функции $y = x^2$ точка:

а) $K(0,103; 0,010609)$; в) $M\left(1\frac{3}{7}; 2\frac{2}{49}\right)$;

б) $L(-0,103; 0,0169)$; г) $P\left(-2\frac{5}{8}; 7\frac{7}{64}\right)$?

1108. Используя график функции $y = x^4$ (см. рис. 60), решите уравнение:

а) $x^4 = 5$; в) $x^4 = x$;

б) $x^4 = -3$; г) $x^4 = -x$.

1109. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^4 = x + 4$; б) $x^4 = x - 2$?

1110. Известно, что точка $A(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = x^6$. Принадлежит ли этому графику точка:
а) $B(-a;\ b)$; б) $C(a;\ -b)$; в) $D(-a;\ -b)$?

1111. Пересекает ли график функции $y = x^2$ отрезок AB, если:
а) $A(-1{,}12;\ 4)$, $B(0{,}98;\ 1)$;
б) $A(-2{,}02;\ 4)$, $B(0{,}92;\ 1)$;
в) $A(-9{,}72;\ 100)$, $B(10{,}02;\ 100)$?

Упражнения для повторения

1112. Пересекаются ли графики функций:
а) $y = 12x - 7$ и $y = 3x + 11$;
б) $y = -32x + 17$ и $y = 16(3 - 2x)$;
в) $y = -12x + 3(4x - 1)$ и $y = 9x$;
г) $y = \frac{1}{2}(7x + 4)$ и $y = -3{,}5x$?

1113. Найдите наименьшее значение функции:
а) $p(t) = t^2 - 2t + 1$;
б) $s(t) = t^2 + 2t + 2$;
в) $y(x) = 2x^2 + 8x + 11$.

1114. Докажите, что значения многочлена $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ при целых значениях x кратны числу 24.

1115. С овощной базы в первый день было вывезено овощей на 2 т больше, чем во второй, а в третий день — $\frac{3}{5}$ того, что вывезли за первые два дня. Сколько тонн овощей было вывезено в каждый день, если всего за три дня вывезено 32 т?

41. Функция $y = x^3$. Степенная функция с нечётным показателем

Вы познакомились со свойствами и графиком функции $y = x^2$. Теперь выясним, какими свойствами обладает степенная функция $y = x^3$, а затем построим её график.

1) При значении аргумента, равном нулю, значение функции также равно нулю.

Это следует из того, что если $x = 0$, то $y = 0^3 = 0$.

Значит, точка (0; 0) принадлежит графику функции, иными словами, график проходит через начало координат.

2) При любом положительном значении аргумента функция принимает положительное значение, при любом отрицательном значении аргумента — отрицательное значение.

Действительно, если $x > 0$, то $x^3 > 0$, т. е. $y > 0$. Если $x < 0$, то $x^3 < 0$, так как нечётная степень отрицательного числа отрицательна, т. е. $y < 0$.

Из этого свойства следует, что все точки графика с положительными абсциссами расположены выше оси x, а точки с отрицательными абсциссами — ниже оси x.

3) Любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

Например, если $x = 2$, то $y = 2^3 = 8$; если $x = -2$, то $y = (-2)^3 = -8$. Вообще пусть a — произвольное положительное число. Если $x = a$, то $y = a^3$, где $a^3 > 0$; если $x = -a$, то $y = (-a)^3 = -a^3$, где $-a^3 < 0$.

Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, расположены симметрично относительно начала координат (они лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от точки (0; 0) и на равном расстоянии от неё; иными словами, симметричными относительно начала координат являются точки $(a;\ b)$ и $(-a;\ -b)$).

Построим график функции $y = x^3$.

Составим таблицу для положительных значений аргумента, округляя (там, где это необходимо) значения функции до сотых.

x	0,5	1	1,5	2
y	0,13	1	3,38	8

Отметим на координатной плоскости точку (0; 0), точки, координаты которых указаны в таблице, и точки с абсциссами и ординатами, противоположными тем, которые записаны в таблице (рис. 61).

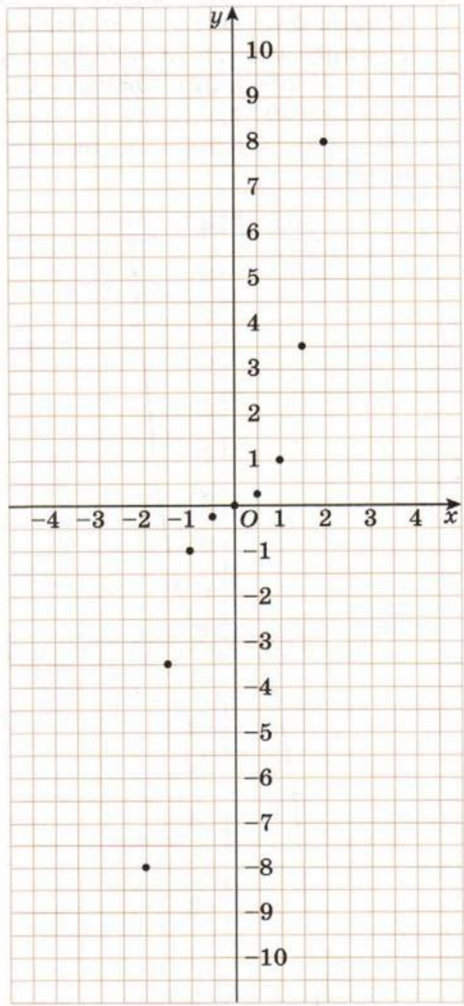


Рис. 61

Заметим, что точки, расположенные вблизи начала координат, ещё плотнее приближены к оси x, чем точки графика функции $y = x^2$. Это видно из таблицы.

x	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,001	0,008	0,027	0,064

Через отмеченные точки проведём плавную линию. Получим график функции $y = x^3$ (рис. 62). Ясно, что построенная кривая неограниченно продолжается вверх (справа от оси y) и вниз (слева от оси y).

График функции $y = x^3$ называют <u>*кубической параболой*</u>.

Функция $y = x^5$ (и вообще функция $y = x^n$, где n — нечётное число, большее 1) обладает такими же свойствами, как и функция $y = x^3$.

Аналогично выглядит и график функции $y = x^5$ (рис. 63). При $0 < x < 1$ он расположен ниже графика функции $y = x^3$, а при $x > 1$ — выше него.

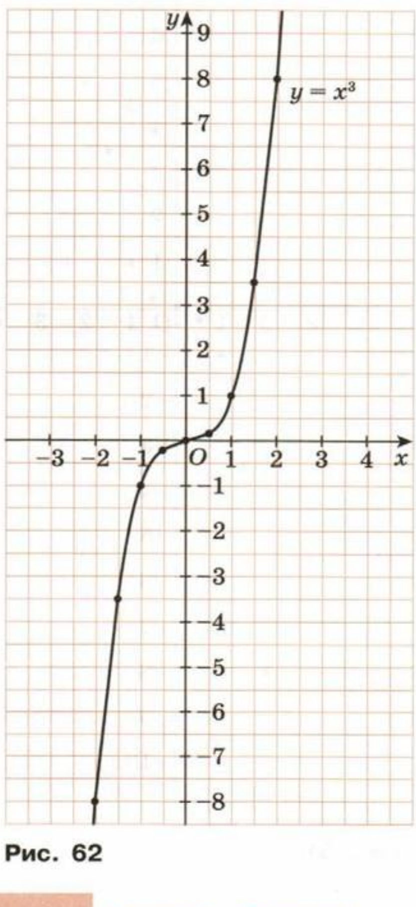


Рис. 62

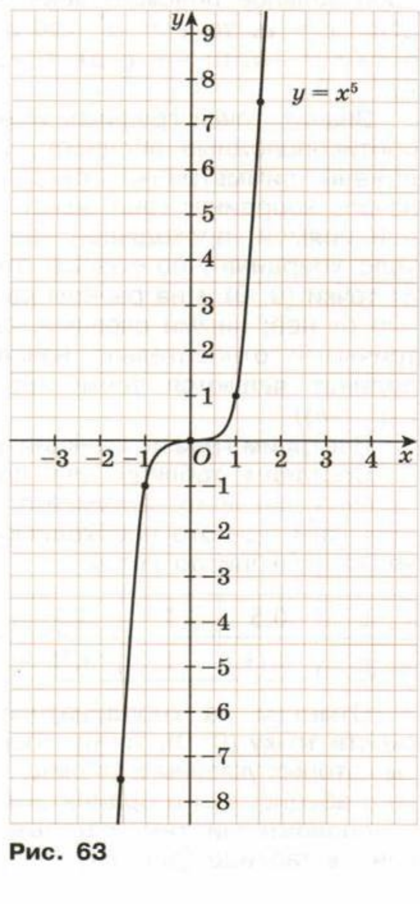


Рис. 63

Упражнения

1116. Пользуясь графиком функции $y = x^3$, изображённым на рисунке 62, найдите:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 0,8; −0,8; 1,3; −1,3; 1,6; −1,6; 1,9;

б) значение x, которому соответствует $y = 3{,}5$; $-3{,}5$; $0{,}9$; $-0{,}9$;

в) множество значений x, при которых значение функции меньше 1; больше −3; больше 1, но меньше 3.

1117. Докажите, что графику функции $y = x^3$ принадлежит точка:

$$K(-6;\ -216);\quad L(1{,}1;\ 1{,}331);\quad M(203;\ 8\,365\,427).$$

1118. Постройте график функции $V = a^3$, где a — ребро куба (в см), а V — объём куба (в см^3). Чем этот график отличается от графика функции $y = x^3$?

1119. Как изменится объём куба, если его ребро:

а) увеличить в 2 раза; в 5 раз; в 10 раз; в n раз, где $n > 1$;

б) уменьшить в 1,5 раза; в 3 раза; в 12 раз; в m раз, где $m > 1$?

1120. Как надо изменить ребро куба, чтобы его объём:

а) уменьшился в 8 раз; в 512 раз;

б) увеличился в 1000 раз; в 216 раз?

1121. Сравните значения степеней, не выполняя вычислений:

а) $(0{,}2)^3$ и $(0{,}3)^3$; в) $(-0{,}2)^3$ и $(-0{,}4)^3$; д) $(-0{,}01)^3$ и $(0{,}01)^3$;

б) $(1{,}3)^3$ и $(-1{,}3)^3$; г) $(-1{,}2)^3$ и $(-1{,}4)^3$; е) $(-1{,}1)^3$ и $(-1{,}01)^3$.

1122. Используя график функции $y = x^3$, решите уравнение:

а) $x^3 = 8$; б) $x^3 = -8$; в) $x^3 = 5$; г) $x^3 = -5$.

1123. Принадлежит ли графику функции $y = x^3$ точка:

а) $A(5;\ 125)$; б) $B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{27}\right)$; в) $C\left(1\frac{1}{3}; 2\frac{10}{27}\right)$; г) $D(-13;\ -2198)$?

1124. Используя графические представления, сравните значения степеней:

а) $0{,}3^5$ и $0{,}5^5$; в) $(-0{,}2)^5$ и $(-0{,}3)^5$;

б) $1{,}8^5$ и $1{,}7^5$; г) $(-4{,}6)^5$ и $(-4{,}5)^5$.

1125. Используя график функции $y = x^5$ (см. рис. 63), решите уравнение:

а) $x^5 = 2$; б) $x^5 = -2$; в) $x^5 = x$; г) $x^5 = -x$.

1126. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^5 = x + 4$; б) $x^5 = -x - 3$?

1127. Известно, что точка $A(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = x^7$. Принадлежит ли этому графику точка:

а) $B(-a;\ b)$; б) $C(-a;\ -b)$; в) $B(a;\ -b)$?

1128. На рисунке 64 построены графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, область определения которых есть множество $\{x \mid x > 0\}$. Пользуясь графиком, сравните:

а) a и a^2, если $0 < a < 1$;
б) a и a^3, если $0 < a < 1$;
в) a^2 и a^3, если $0 < a < 1$;
г) a и a^2, если $a > 1$;
д) a и a^3, если $a > 1$;
е) a^2 и a^3, если $a > 1$.

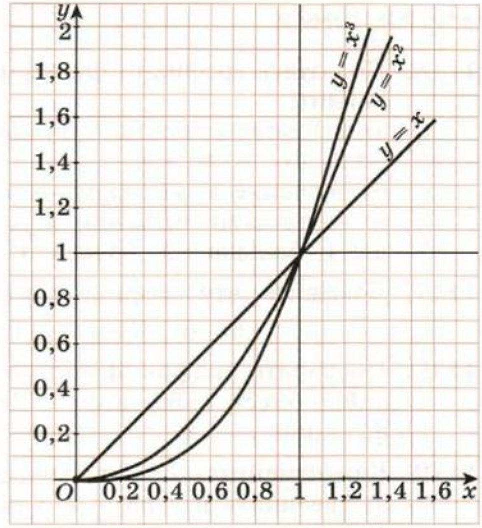


Рис. 64

1129. Запишите числа

$$0{,}208;\ 0{,}208^2;\ 0{,}208^3;\ 1{,}453;\ 1{,}453^2;\ 1{,}453^3$$

в порядке возрастания.

Упражнения для повторения

1130. Принадлежит ли графику функции $y = x^2$ точка:

а) $A(-3{,}2;\ 10{,}24)$; б) $B\left(1\frac{1}{7};\ \frac{49}{64}\right)$; в) $C\left(1\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{4}\right)$?

1131. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 7x - 12$.

1132. Из города A в город B автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, а обратно — со скоростью 90 км/ч. При этом путь из города B в город A занял на 1 ч меньше, чем путь из города A в город B. Найдите расстояние между городами A и B.

1133. Докажите тождество $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется степенной функцией с натуральным показателем?
2. Приведите примеры степенной функции с чётным показателем и с нечётным показателем $n > 1$.
3. Сформулируйте свойства функции $y = x^2$ и её графика.
4. Сформулируйте свойства функции $y = x^3$ и её графика.

Дополнительные упражнения к главе 7

К параграфу 14

1134. Функция задана таблицей:

а)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	6	8	10	12

б)

x	1	2	3	4	5	6
y	12	10	8	6	4	2

в)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{6}$

Задайте каждую из этих функций формулой.

1135. Пусть $X = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ — множество значений аргумента x, а $Y = \{1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4;\ 1{,}5;\ 1{,}6;\ 1{,}7;\ 1{,}8;\ 1{,}9;\ 2\}$ — множество значений функции y. Задайте формулой функцию y от x, зная, что:
а) значению $x = 10$ соответствует $y = 1$;
б) значению $x = 10$ соответствует $y = 2$.

1136. Функция задана формулой $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Найдите:
а) значение функции, если значение аргумента равно -1; 0; 5;
б) значение аргумента, если значение функции равно 0.

1137. Функция задана формулой $y = x^2 - 8x + 7$. Найдите:
а) значение функции, если значение аргумента равно 0; 1; -2;
б) значение аргумента, если значение функции равно 7; 0.

1138. Дана функция $f(x) = 3 - \frac{2}{x+1}$. Найдите $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$.

Существует ли значение аргумента, при котором значение функции равно 3?

1139. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{6}{(x+1)(x+5)}$; г) $y = \frac{x}{x^2+4}$;

б) $y = \frac{9}{x^2-9}$; д) $y = \frac{10}{|x|-1}$;

в) $y = \frac{x^2-4}{4}$; е) $y = \frac{18}{|x-2|}$.

1140. Каждому прямоугольнику соответствует единственное положительное число, выражающее его площадь (в см^2). Это соответствие является функцией. Приведите пример, подтверждающий, что обратное утверждение «каждому положительному числу соответствует единственный прямоугольник, площадь которого (в см^2) равна этому числу» неверно.

1141. Каждому числу m из множества

$$\{10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16;\ 17;\ 18;\ 19;\ 20\}$$

поставили в соответствие остаток r от деления этого числа на 7. Задайте функцию r от m таблицей.

1142. Постройте график функции $y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } -1 \leqslant x < 2, \\ x - 2, & \text{если } 2 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$

1143. Дана функция $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 0, \\ -x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному:

а) -3; б) -1; в) 0; г) 1; д) 2; е) 3.

1144. Постройте график функции:

а) $y = \frac{6}{x+2}$, где $-1 \leqslant x \leqslant 2$; в) $y = x^2 - 1$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$;

б) $y = \frac{x-2}{2}$, где $-1 \leqslant x \leqslant 4$; г) $y = x^2 - 3x$, где $-1 \leqslant x \leqslant 4$.

1145. Кривая AB (рис. 65) — график первой функции, кривая CD — график второй функции. Укажите множество значений аргумента, при которых:

а) значения первой и второй функций равны;

б) значения первой функции больше, чем значения второй функции;

в) значения первой функции меньше, чем значения второй функции.

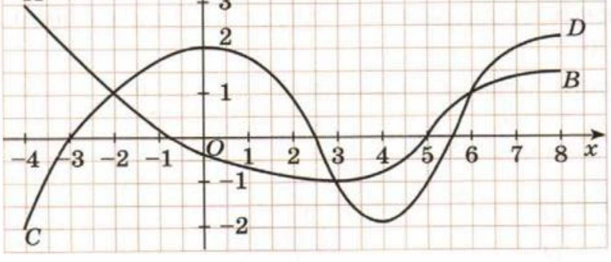


Рис. 65

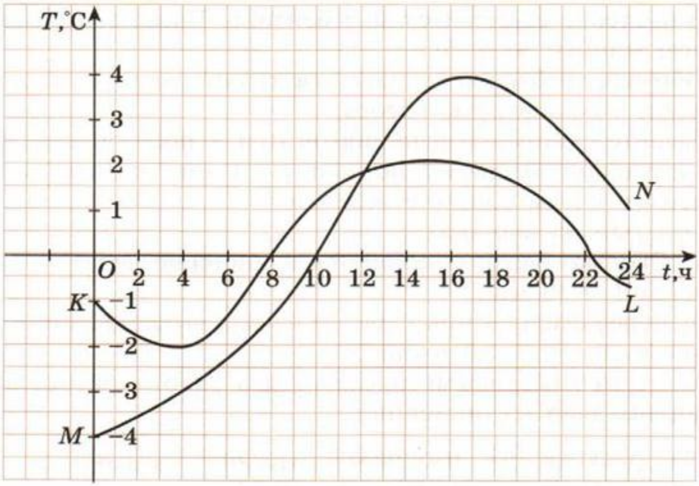


Рис. 66

1146. На рисунке 66 изображены графики изменения температуры воздуха в Новгороде (кривая KL) и Архангельске (кривая MN) в течение суток. Ответьте на вопросы:

а) В какие промежутки времени температура воздуха в Новгороде и Архангельске была ниже 0 °C? была равна 0 °C? была выше 0 °C? повышалась? понижалась?

б) В какое время суток температура воздуха была одинакова в обоих городах? была в Новгороде выше, чем в Архангельске? была в Новгороде ниже, чем в Архангельске?

в) На сколько градусов выше (или ниже) была температура воздуха в Новгороде, чем в Архангельске, в 6 ч? в 12 ч? в 18 ч?

К параграфу 15

1147. Докажите, что функция, заданная формулой $y = (x - 8)^2 - (x + 8)^2$, является прямой пропорциональностью.

1148. Постройте график функции:

а) $y = 2x\,(x - 5) - \frac{1}{4}x(8x - 38)$; б) $y = x^2\,(x - 1{,}5) - (x - 0{,}5)^3 - \frac{1}{8}$.

1149. График прямой пропорциональности — прямая, параллельная графику линейной функции, проходящему через точки $A\left(\frac{1}{2};\ 25\right)$ и $B\left(\frac{1}{4};\ 0\right)$. Задайте эту прямую пропорциональность формулой.

1150. В цистерне содержится 30 т бензина. Насос выкачивает из неё каждую минуту по 0,25 т.

Обозначьте буквой m массу (в т) оставшегося в цистерне бензина после t мин работы насоса.

Задайте формулой функцию m от t и постройте её график, выбрав следующий масштаб: по оси t — 1 см соответствует 20 мин, по оси m — 1 см соответствует 5 т.

Ответьте на вопросы:

а) Сколько бензина останется в цистерне через 20 мин? через 1 ч? через 1 ч 40 мин?

б) Через сколько минут после начала выкачивания в цистерне останется 20 т? 10 т бензина?

в) Через какое время после начала работы насоса весь бензин будет выкачан из цистерны?

1151. На рисунке 67 изображён график движения автомобиля из пункта A в пункт B. Задайте функцию s от t тремя формулами.

При каких значениях t эта функция является прямой пропорциональностью?

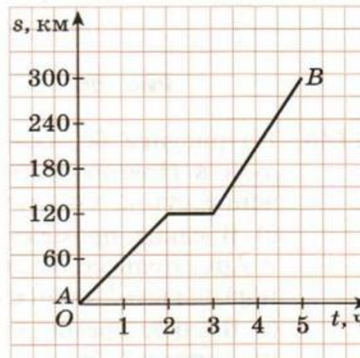


Рис. 67

1152. Точка $B(m; 1{,}5)$ принадлежит графику функции $y = -4{,}5x$. Найдите значение m.

1153. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} -0{,}5x, & \text{если } x < 0, \\ 0{,}5x, & \text{если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x < 0, \\ -2x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

1154. Докажите, что функция, заданная формулой $y = (x-3)^2 - x(x-8)$, является линейной.

1155. Является ли линейной функция, заданная формулой:

а) $y = \frac{7x-12}{10}$;

б) $y = \frac{20x-9}{x}$;

в) $y = x^2 - x(x+1)$;

г) $y = (x+5)^2 - (x-5)^2$;

д) $y = (x-1)^2 + 3(x-3)$;

е) $y = (x+2)^3 - x(x+3)^2$?

1156. Задайте линейную функцию формулой, если известно, что при $x = 5$ $y = 46$, а при $x = 0$ $y = 6$.

1157. Множество $X = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$ является областью определения некоторой линейной функции, а множество $Y = \{y \mid 2 \leqslant y \leqslant 6\}$ — множеством значений, принимаемых функцией. Подберите две различные формулы, которыми можно задать эти функции.

1158. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = (x - 0{,}5)^2 - (x + 0{,}5)^2$;

б) $y = (x + 0{,}5)^3 - x^2(x + 1{,}5)$.

1159. Функция m от n задана описанием: каждому натуральному числу n соответствует число m, которое при делении на 2 даёт в частном n и в остатке 1. Задайте эту функцию формулой. Что представляет собой график этой функции?

1160. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \leqslant x < 3, \\ -x + 6, \text{ если } 3 \leqslant x \leqslant 6; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -2, & \text{если } x < -2, \\ x, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

1161. Дана функция: $y = \begin{cases} -x - 2, & \text{если } x < 0, \\ x - 2, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

Заполните таблицу

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

и постройте график функции.

1162. Дана линейная функция $y = kx - 3$. При каком значении коэффициента k график этой функции:

а) параллелен графику прямой пропорциональности $y = -4x$;

б) не пересекает график линейной функции $y = -0{,}1x + 4$;

в) не пересекает ось абсцисс;

г) проходит через точку $M(-1;\ 1)$;

д) пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой −1;

е) проходит через точку пересечения графиков функций $y = 2 - x$ и $y = x + 1$;

ж) пересекает ось абсцисс в точке с положительной абсциссой;

з) проходит через точку, абсцисса и ордината которой равны?

1163. График линейной функции проходит через точки $C(0; 2)$ и $D(6; 0)$. Задайте формулой прямую пропорциональность, если известно, что её график параллелен графику данной линейной функции.

1164. Графики линейных функций

$$y = -2x + 1, \quad y = 0{,}5x + 4, \quad y = -2x + 9, \quad y = 0{,}5x - 1$$

пересекаются в точках A, B, C и D. Постройте четырёхугольник $ABCD$.

1165. В результате пересечения прямых, являющихся графиками линейных функций

$$y = \frac{1}{3}x - 1, \ y = -2x - 1 \text{ и } y = -\frac{1}{4}x + 4{,}25,$$

образовался треугольник. Постройте его.

1166. Выясните, лежат ли точки $A(-4; 6)$, $B(4; 4)$ и $C(12; 2)$ на одной прямой.

1167. Найдите угол наклона прямой (графика линейной функции) к оси x, если угловой коэффициент этой прямой равен:

а) 1; б) -1.

1168. Докажите, что треугольник, ограниченный прямыми $y = -x + 1$, $y = x + 1$ и осью x, прямоугольный.

1169. Какую фигуру образует множество точек, ограниченное прямыми

$$y = x + 4, \quad y = x - 4, \quad y = -x + 4, \quad y = -x - 4?$$

К параграфу 16

1170. Точка $A(a; 2{,}25)$ принадлежит графику функции $y = x^2$. Найдите абсциссу точки A.

1171. Точка $B(9; b)$ принадлежит графику функции $y = x^2$. Найдите ординату точки B.

1172. Точка $C(a; b)$ принадлежит графику функции $y = x^2$ и графику функции $y = x^3$. Найдите координаты точки C. Сколько таких точек?

1173. Постройте график функции $y = -x^2$ и опишите его свойства.

1174. Постройте график функции $y = -x^3$ и опишите его свойства.

1175. Принадлежит ли графику функции $y = x^4$ точка:

а) $A(3; 81)$;

б) $B(-1{,}1; 1{,}4641)$;

в) $C(28; 614\,657)$?

1176. Принадлежит ли графику функции $y = x^5$ точка:

а) $K(-5;\ 3125)$;

б) $L(49;\ 720\,576\,032)$;

в) $M(7;\ 16\,807)$?

1177. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x^2, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x^3, & \text{если } x < 0, \\ -x, & \text{если } x \geqslant 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant -1 \text{ или } x \geqslant 1, \\ x^2, & \text{если } -1 < x < 1; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} -1, & \text{если } x < -1, \\ x^3, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

1178. Используя график функции $y = x^2$ (см. рис. 59) и линейку, решите уравнение:

а) $x^2 = x + 6$;

б) $x^2 = x + 2$;

в) $x^2 = -2x + 3$;

г) $x^2 = -3{,}5x + 2$.

1179. Используя график функции $y = x^3$ (см. рис. 62) и линейку, решите уравнение:

а) $x^3 = x$;

б) $x^3 = 0{,}5x + 0{,}5$;

в) $x^3 = 8$;

г) $x^3 = 2{,}25x$.

1180. Используя графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$, найдите (приближённо) корни уравнения:

а) $x^2 = 2$;

б) $x^2 = \frac{1}{2}$;

в) $x^3 = 2$;

г) $x^3 = \frac{1}{2}$.

1181. Воспользовавшись графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$, укажите множество значений x, для которых выполняется неравенство:

а) $x^2 < 2$; б) $x^3 < 2$.

1182. Используя графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$, докажите, что:

а) $x^3 < x^2$, если $x < 1$;

б) $x^3 > x^2$, если $x > 1$.

1183. Расположите в порядке возрастания числа a, a^2, a^3, a^4, a^5, если известно, что:

а) $0 < a < 1$;

б) $a > 1$;

в) $-1 < a < 0$;

г) $a < -1$.

1184. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^4 = 3$;

б) $x^4 = -2$;

в) $x^5 = -2$;

г) $x^5 = 3$?

Глава 8 Системы линейных уравнений

В этой главе рассматриваются уравнения с двумя переменными, их решения и графики. Основной материал главы посвящён простейшим уравнениям — линейным уравнениям с двумя переменными, а также их системам. Среди традиционных тем — решение линейных уравнений с двумя переменными в целых числах — решение диофантовых уравнений. Весь изученный материал применяется для решения текстовых задач с помощью систем уравнений.

§ 17. Линейные уравнения с двумя переменными

42. Уравнения с двумя переменными

Рассмотрим равенство

$$x^2 + 2y = 6. \quad (1)$$

Оно содержит две переменные x и y. Такие равенства называют уравнениями с двумя переменными.

Если в уравнение $x^2 + 2y = 6$ вместо x подставить число 2, а вместо y — число 1, то получится верное равенство

$$2^2 + 2 \cdot 1 = 6.$$

Пару чисел 2 и 1 называют *решением уравнения* (1).

Определение. Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Пара чисел 1 и 2, где 1 — значение x, а 2 — значение y, не является решением уравнения (1), так как равенство $1^2 + 2 \cdot 2 = 6$ неверно.

Пару значений двух переменных обычно записывают с помощью круглых скобок. Рассмотренные пары чисел 1 и 2, 2 и 1 можно записать так: (1; 2), (2; 1). При такой записи надо условиться, какое из значений двух переменных пишется на первом месте и какое — на втором. Для переменных x и y обычно на первом месте пишут значение переменной x.

Найдём ещё несколько решений уравнения (1). Для этого подставим в это уравнение вместо переменной x какое-нибудь её значение, например число 4. Получим уравнение с одной переменной

$$4^2 + 2y = 6.$$

Решив это уравнение, найдём $y = -5$.

Пара чисел (4; –5) является ещё одним решением уравнения (1), так как равенство $4^2 + 2 \cdot (-5) = 6$ верно.

При нахождении других решений уравнения (1) придётся снова подставлять вместо переменной x какое-нибудь её значение и решать уравнение с одной переменной. Эту работу можно несколько упростить, если сначала решить уравнение (1) относительно переменной y, т. е. выразить переменную y через переменную x. Для этого перенесём слагаемое x^2 из левой части в правую, изменив его знак, а затем разделим на 2 обе части уравнения, получим

$$y = 3 - \frac{1}{2}x^2. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) имеют одно и то же множество решений.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одно и то же множество решений, называются *равносильными*.

При получении уравнения (2) из уравнения (1) были использованы *свойства уравнения с двумя переменными*. Они формулируются так же, как и свойства уравнения с одной переменной:

1) если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному;

3) если в какой-либо части или в обеих частях уравнения выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения уравнения, то получится уравнение, равносильное данному.

Теперь, чтобы найти какое-нибудь решение уравнения (1), достаточно подставить в равносильное ему уравнение (2) вместо x одно из его значений и найти соответствующее ему значение y. Например,

если $x = -2$, то $y = 1$;

если $x = 0$, то $y = 3$;

если $x = 1$, то $y = 2\frac{1}{2}$ и т. д.

Уравнение с двумя переменными обычно имеет бесконечное множество решений. Однако можно указать уравнение с двумя переменными, имеющее одно решение или не имеющее решений. Так, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ имеет лишь одно решение (0; 0), а уравнение $x^2 + y^2 = -1$ не имеет решений.

Упражнения

1185. Какие из пар (0; 5), (5; 0), (13; 12), (5; 5), (–3; –4), (3; 4), (4; 3) являются решениями уравнения:

а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $x^2 - y^2 = 25$?

1186. Является ли пара чисел (–6; 1) решением уравнения:

а) $2x + 3y = -9$; б) $3y - 2x = 10$?

1187. Пары значений переменных u и v указаны в таблице.

u	–3	–2	–1	0	1	2	3
v	5	1	–3	2	–3	0	4

Какие из них являются решениями уравнения:

а) $u^2 - v - 4 = 0$; б) $3u - 5v = -11$?

1188. Напишите какое-нибудь уравнение с переменными y и z, решением которого является пара чисел:

а) $y = -5$ и $z = 2$; б) $y = 3{,}5$ и $z = 4$.

1189. Найдите два каких-нибудь решения уравнения:

а) $x - 3y^2 = 5$; б) $2x^2 - y = 4$.

1190. Выразите переменную y через переменную x, используя уравнение:

а) $3 + 3y - 2x^2 = 0$; б) $7x + 5y = 3$.

1191. С помощью уравнения $v - 2u = 10$ выразите:

а) v через u; б) u через v.

1192. Решите относительно переменной y уравнение:

а) $4x - 5y = 0$; б) $4y - x^2 = 4$; в) $2x^2 - y = 4$.

1193. Выразите из уравнения:

а) $m^2 - n = 5$ переменную n через переменную m;
б) $2x + 3y = 6$ переменную y через переменную x;
в) $2x - 3y = 6$ переменную x через переменную y;
г) $4h - 2t = 1$ переменную t через переменную h.

1194. Найдите три каких-нибудь решения уравнения:

а) $3x + 4y = 12$; в) $2x - 5y^2 = 5$;
б) $9x - 2y = -18$; г) $3x^2 - 2y = -1$.

1195. Выразив переменную x через переменную y, найдите два каких-нибудь решения уравнения:

а) $7y - x = -2$; б) $4x - 3y = 15$.

1196. Среди решений уравнения $y - 3x = 6$ найдите такое решение, в котором значения переменных:

а) равны; б) противоположны; в) отличаются на 1.

1197. При каком значении a пара $(a + 1; 2a - 1)$ является решением уравнения:

а) $2x + y = 5$; б) $x - 2y = 1$; в) $x^2 - y^2 = 3$?

Упражнения для повторения

1198. Разложите на множители:

а) $x^3 + x^2 - x - 1$; б) $16 - 4a + a^3 - a^4$.

1199. Докажите тождество

$$(x + y)^3(x - y)^2 = x(x^2 - y^2)^2 + y(x^2 - y^2)^2.$$

1200. Представьте в виде многочлена:

а) $(p + k - 4)(p + k + 4)$; в) $(x - y - 6)(x + y + 6)$;

б) $(a - b + 5)(a + b + 5)$; г) $(m - n + 2)(m + n - 2)$.

43. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

Каждое решение уравнения с двумя переменными можно изобразить точкой в координатной плоскости. Множество таких точек называют *графиком уравнения с двумя переменными*.

Определение. Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Из попытки заменить линии их уравнениями и наоборот в XVII в. зародилась аналитическая геометрия. У её истоков стояли два французских математика: П. Ферма и Р. Декарт.

Рене Декарт (1596—1650), французский философ, математик, физик и физиолог; заложил основы аналитической геометрии, дал понятие переменной величины и функции, ввёл многие алгебраические обозначения.

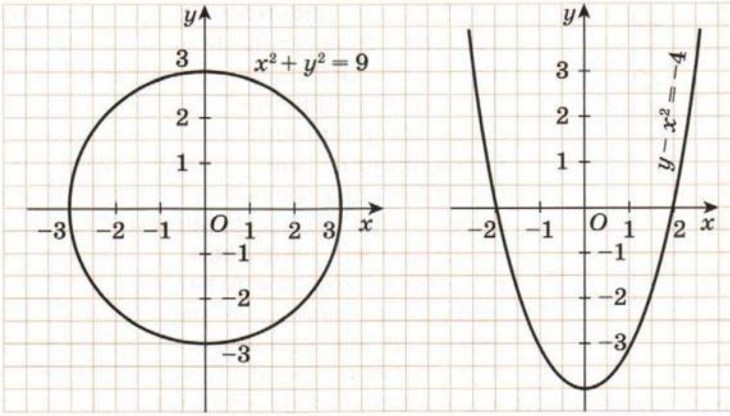


Рис. 68

На рисунке 68 изображены графики уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $y - x^2 = -4$. Первый из них показывает, что соответствие, задаваемое уравнением $x^2 + y^2 = 9$, не является функцией, так как, например, значению x, равному нулю, соответствует не одно, а два значения y — числа 3 и –3. Второй является графиком функции, так как каждому значению x соответствует одно значение y.

Каждое из уравнений $4x + 3y = 8$, $5x - 6y = 0$, $-2x + y = -2$ имеет вид $ax + by = c$. Для первого уравнения $a = 4$, $b = 3$ и $c = 8$, для второго $a = 5$, $b = -6$ и $c = 0$, для третьего $a = -2$, $b = 1$ и $c = -2$. Уравнения такого вида называют *линейными уравнениями с двумя переменными*.

Определение. Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа.

Число c в линейном уравнении называют *свободным членом*.

Рассмотрим график линейного уравнения. Возьмём в качестве примера уравнение $-2x + y = 3$. Решим это уравнение относительно y. Получим

$$y = 2x + 3.$$

Формулой $y = 2x + 3$ задаётся линейная функция. Её графиком является прямая (рис. 69). Так как равносильные уравнения $y = 2x + 3$ и $-2x + y = 3$ имеют одно и то же множество решений и, следовательно, один и тот же график, то графиком уравнения $-2x + y = 3$ является прямая, изображённая на рисунке 69.

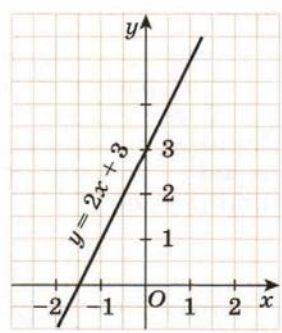


Рис. 69

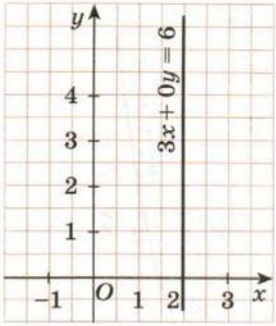


Рис. 70

Вообще графиком любого линейного уравнения с двумя переменными x и y, которое можно решить относительно y, является прямая. Решить линейное уравнение относительно y можно тогда, когда коэффициент при y не равен нулю. Если же коэффициент при y равен нулю, то следует рассмотреть два случая: 1) коэффициент при x не равен нулю, 2) коэффициент при x равен нулю.

Возьмём, например, уравнение $3x + 0y = 6$, в котором коэффициент при y равен нулю, а коэффициент при x не равен нулю. Его решениями являются все пары чисел $(x; y)$, в которых $x = 2$, а y — любое число. Следовательно, график этого уравнения будет состоять из всех точек координатной плоскости, имеющих абсциссу 2. Эти точки образу-ют прямую (рис. 70), параллельную оси y и проходящую через точку (2; 0).

Рассмотрим, наконец, уравнение вида $0x + 0y = c$, в котором коэффициенты при y и при x равны нулю. Если при этом $c \neq 0$, то уравнение не имеет ни одного решения. Значит, его график — пустое множество. Если же $c = 0$, то любая пара чисел служит его решением. В этом случае графиком уравнения является вся плоскость.

<u>Графиком линейного уравнения с двумя переменными</u>, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является прямая.

Если в линейном уравнении коэффициенты при переменных равны нулю, а свободный член не равен нулю, то его график – пустое множество.

Если же коэффициенты при переменных и свободный член равны нулю, то графиком линейного уравнения является плоскость.

Рассмотрим на примерах построение графиков линейных уравнений, в которых хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля.

Пример 1. Построим график уравнения $2x - 3y = 6$.

Это уравнение линейное, так как оно имеет вид $ax + by = c$, где $a = 2$, $b = -3$ и $c = 6$. Коэффициенты при переменных отличны от нуля. Поэтому его графиком является прямая. Так как прямая определяется двумя её точками, то достаточно найти координаты двух каких-либо точек этой прямой:

$$\text{если } x = 0, \text{ то } y = -2;$$
$$\text{если } x = 3, \text{ то } y = 0.$$

Отметим в координатной плоскости точки (0; –2) и (3; 0) и проведём через них прямую (рис. 71). Эта прямая является графиком уравнения $2x - 3y = 6$.

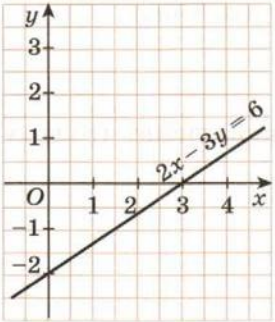


Рис. 71

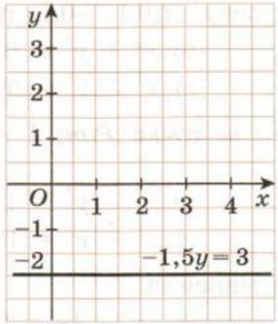


Рис. 72

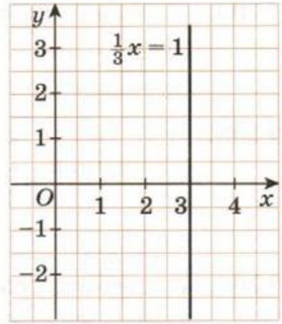


Рис. 73

Пример 2. Построим график уравнения $-1{,}5y = 3$.

Данное уравнение можно рассматривать как линейное уравнение $0x - 1{,}5y = 3$ с двумя переменными, так как оно имеет вид $ax + by = c$, где $a = 0$, $b = -1{,}5$ и $c = 3$. Коэффициент при y отличен от нуля, значит, графиком уравнения является прямая. Она параллельна оси x (рис. 72), поскольку каждому значению x соответствует значение $y = -2$. Эта прямая проходит через точку (0; –2).

Пример 3. Построим график уравнения $\frac{1}{3}x = 1$.

Это уравнение можно рассматривать как линейное уравнение $\frac{1}{3}x + 0y = 1$ с двумя переменными, так как оно имеет вид $ax + by = c$, где $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$ и $c = 1$. Графиком этого уравнения является прямая, проходящая через точку (3; 0). Она параллельна оси y (рис. 73), поскольку значению $x = 3$ соответствует любое значение y.

Упражнения

1201. Какие из уравнений

$$-x + 6y = -5, \quad x^2 + y = 7, \quad 2y - 4x = 9 \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} = 12$$

являются линейными уравнениями с двумя переменными?

1202. Проходит ли через начало координат график уравнения:

а) $y = -0{,}8x$;
в) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$;
б) $y - 4 = 5x - 3$;
г) $(x + 3)^2 = (y - 3)^2$?

1203. Какие из точек $A(-1; -2)$, $B(4; -2)$, $C(0{,}4; 0)$ и $D(10; 1)$ принадлежат графику уравнения:

а) $10x - 7y = 4$;
б) $\frac{x}{y} = 2x - 10$?

1204. Проходит ли через точку $M(0{,}1; -0{,}1)$ график уравнения:

а) $2x - 10y = -0{,}8$; в) $x^2 + y^2 = 0{,}02$;

б) $-5x + 3y = -1$; г) $x^2 - y^2 = 0$?

1205. При каком значении m точка $P(m; 1 - m)$ принадлежит графику уравнения:

а) $2x + y = 7$; в) $x^2 - y^2 = 14$;

б) $2x - y = 5$; г) $x^2 + y^2 = 1$?

1206. Постройте график уравнения:

а) $y - 3x = 4$; г) $4y - 3x = 8$;

б) $2y + x = -3$; д) $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}x = 1$;

в) $3y + 4x = 12$; е) $0{,}5y - 0{,}2x = 0{,}3$.

1207. Начертите график уравнения:

а) $3x = 2y + 1$; г) $5y = -2{,}5x$;

б) $-3y = 2x + 6$; д) $0{,}6x = -3$;

в) $5x = 2{,}5y$; е) $-0{,}5y = 1{,}5$.

1208. Постройте график уравнения:

а) $y - x = 3{,}5$; г) $5y - 2x = 10$;

б) $y + x = -4$; д) $-0{,}2x = 1$;

в) $1{,}5x + 1{,}5y = 3$; е) $0{,}3y = -1{,}5$.

1209. Начертите график уравнения:

а) $x + y + 1 = 0$; в) $0{,}8(x - y) = 5 - 2y$;

б) $x + 3 = 2y$; г) $(2x - y) + (2x + y) = 12$.

1210. На графике уравнения $16x - 15y = 80$ взята точка A. Найдите:

а) ординату точки A, если её абсцисса 10;

б) абсциссу точки A, если её ордината -4.

1211. Точка M принадлежит графику уравнения $24x + 25y = 600$. Найдите:

а) абсциссу точки M, если её ордината 24;

б) ординату точки M, если её абсцисса 25.

1212. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:

а) $12x - 15y = 180$; б) $30x + 20y = 6$.

1213. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений $1{,}2x = 3$ и $2y = -5$.

Упражнения для повторения

1214. Найдите два каких-либо решения уравнения:

а) $10y - 5x = 20$;

б) $4x^2 + 3y = 8$.

1215. Упростите выражение:

а) $(2x - 7y)^2 + (3x + 4y)^2 - (3x + y)(3x - y)$,

б) $5(a - 4b)(4b + a) + (a - 4b)(-4b + a) + (a + 4b)^2$.

44. Решение линейных уравнений с двумя переменными в целых числах

Пары чисел $\left(\frac{1}{5}; -\frac{1}{3}\right)$, $(-5; -9)$, $(1; 1)$, $(4; 6)$ являются решениями линейного уравнения $5x - 3y = 2$ с двумя переменными. Три последние пары отличаются тем, что значения x и y в них — числа целые. Такие решения называют *целочисленными решениями*. Если требуется найти все целочисленные решения, то говорят о *решении уравнения в целых числах*.

Именно таким решениям уравнений был посвящён труд Диофанта Александрийского (III в.) «Арифметика».

Уравнение $4x + 3y = \frac{1}{2}$ не имеет целочисленных решений, так как при целых значениях x и y значение левой части есть целое число, тогда как значение правой части — число дробное.

Уравнение $7x - y = -1$ имеет сколько угодно целочисленных решений. Если решим это уравнение относительно y, то получим равносильное ему уравнение

$$y = 1 + 7x.$$

При подстановке вместо x любого целого числа n в результате вычислений получим соответствующее значение y, которое также будет целым числом. Таким образом можно найти сколько угодно целочисленных решений уравнения $7x - y = -1$. Все целочисленные решения этого уравнения выражаются формулами $x = n$ и $y = 1 + 7n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; \ldots$.

Найдём по этим формулам несколько целочисленных решений уравнения $7x - y = -1$:

если $n = 0$, то $x = 0$ и $y = 1$;
если $n = 1$, то $x = 1$ и $y = 8$;
если $n = -1$, то $x = -1$ и $y = -6$;
если $n = 2$, то $x = 2$ и $y = 15$;
если $n = -2$, то $x = -2$ и $y = -13$.

Уравнение $4x + 3y = \frac{1}{2}$ имеет вид $ax + by = c$, в котором a и b — взаимно простые числа. Любое линейное уравнение с рациональными числами a, b и c можно привести к такому виду.

По этому виду можно узнать о наличии в нём целочисленных решений: если свободный член уравнения — дробное число, то уравнение не имеет целочисленных решений.

Уравнение $7x - y = -1$ имеет вид $ax + by = c$, в котором a или b равно 1 или -1, а c — число целое. К такому же виду с помощью введения вспомогательных переменных можно привести любое линейное уравнение с двумя переменными, в котором коэффициенты при переменных (или их модули) — взаимно простые числа, а свободный член — целое число.

Возьмём уравнение $20x + 3y = 10$. Его коэффициенты при переменных — взаимно простые числа и свободный член — целое число. Коэффициент при x больше коэффициента при y. Представим его в виде суммы двух натуральных слагаемых так, чтобы первое слагаемое было наибольшим числом, кратным числу 3 (коэффициенту при y). Получим

$$20x + 3y = 10,$$
$$(18 + 2)x + 3y = 10.$$

Раскроем скобки, сгруппируем первое и третье слагаемые и вынесем за скобки общий множитель 3:

$$18x + 2x + 3y = 10,$$
$$3(6x + y) + 2x = 10.$$

Обозначим выражение $6x + y$ буквой k:

$$6x + y = k. \qquad (1)$$

Получим уравнение с переменными k и x:

$$3k + 2x = 10.$$

Проведём аналогичные преобразования с полученным уравнением:

$$(2 + 1)k + 2x = 10,$$
$$2k + k + 2x = 10,$$
$$2(k + x) + k = 10.$$

Обозначим выражение $k + x$ буквой n:

$$k + x = n. \qquad (2)$$

Получим уравнение с двумя переменными k и n:

$$2n + k = 10.$$

В этом уравнении коэффициент при k равен 1. Решив уравнение относительно k, получим

$$k = 10 - 2n.$$

Подставим в равенство (2) вместо k выражение $10 - 2n$:

$$10 - 2n + x = n.$$

Решим получившееся уравнение относительно x:

$$x = -10 + 3n.$$

Мы получили одну из формул решений уравнения $20x + 3y = 10$. Чтобы получить вторую формулу, подставим в равенство (1) вместо x выражение $-10 + 3n$, а вместо k выражение $10 - 2n$:

$$6(-10 + 3n) + y = 10 - 2n.$$

Решим полученное уравнение относительно y:

$$y = 70 - 20n.$$

Формулы $x = -10 + 3n$ и $y = 70 - 20n$ при $n = 0; \pm1; \pm2; \dots$ дают все целочисленные решения уравнения $20x + 3y = 10$. Например,
если $n = 3$, то $x = -1$ и $y = 10$;
если $n = 0$, то $x = -10$ и $y = 70$.

Решение некоторых задач сводится к нахождению одного или нескольких целочисленных решений линейного уравнения с двумя переменными.

Задача. Купили несколько книг по 70 р. и несколько по 80 р. Вся покупка обошлась в 500 р. Сколько купили книг?

Решение. Пусть купили x книг по 70 р. и y книг по 80 р. Тогда все книги стоили $70x + 80y$ р. По условию задачи за них заплатили 500 р. Значит,

$$70x + 80y = 500.$$

Разделим каждую часть уравнения на 10:

$$7x + 8y = 50.$$

Числа 7 и 8 взаимно простые, а число 50 — целое. Поэтому уравнение имеет сколько угодно целочисленных решений. Найдём их формулы:

$$7x + 8y = 50,$$
$$7x + (7 + 1)y = 50,$$
$$7x + 7y + y = 50,$$
$$7(x + y) + y = 50,$$
$$x + y = n,$$
$$7n + y = 50,$$
$$y = 50 - 7n,$$
$$x + 50 - 7n = n,$$
$$x = -50 + 8n.$$

Значит, $x = -50 + 8n$ и $y = 50 - 7n$, где $n = 0; \pm1; \pm2; \dots$. Значение x будет положительным при $n > 6$, а значение y будет положительным при $n < 8$. Обоим условиям удовлетворяет $n = 7$. Действительно, если $n = 7$, то $x = 6$ и $y = 1$.

Ответ: 7.

Упражнения

1216. Имеет ли целочисленные решения уравнение:

а) $12x + 18y = 30$; в) $1\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 1$;

б) $25x - 15y = 2$; г) $\frac{4}{7}x - 1\frac{1}{3}y = \frac{20}{21}$?

1217. Решите уравнение в целых числах:

а) $4x + 3y = 2$; в) $7x + 5y = 10$;

б) $2x - 5y = 1$; г) $3x - 11y = -4$.

1218. Найдите три целочисленных решения уравнения:

а) $5x - 2y = 3$; в) $7x + 4y = 0$;

б) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = -\frac{5}{6}$; г) $1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y = 1$.

1219. Найдите:

а) все пары натуральных чисел, которые являются решениями уравнения $x + y = 6$;

б) все пары простых чисел, которые являются решениями уравнения $x + y = 42$.

1220. Имеются детали массой 8 кг и 3 кг. Сколько необходимо взять одних и других деталей, чтобы получить груз 32 кг?

1221. Группу, состоящую из 45 туристов, решили расселить на теплоходе в четырёхместные и трёхместные каюты так, чтобы в каютах не оставалось свободных мест. Сколько четырёхместных и сколько трёхместных кают нужно заказать?

1222. Хозяйка купила глубокие и мелкие тарелки, заплатив за покупку 2000 р. Глубокая тарелка стоит 200 р., а мелкая — 150 р. Сколько глубоких и сколько мелких тарелок купила хозяйка?

1223. Каждым выстрелом по мишени спортсмен выбивал или 8, или 9 очков. Сделав более 10 выстрелов, он выбил 90 очков. Сколько раз спортсмен выбил 8 и 9 очков?

1224. Вы должны заплатить за купленный в магазине товар 19 р. У вас одни лишь пятирублёвые монеты, а у кассира — только двухрублёвые. Как расплатиться с кассиром?

1225. Решите в целых числах уравнение

$$xy = x + y.$$

1226. Докажите, что уравнение $x^2 - y^2 = 1982$ не имеет решений в целых числах.

Упражнения для повторения

1227. Постройте график уравнения:

а) $4y - 1 = 2(y + x - 1)$;

б) $2(y - 1) + 3 = 3(2x + 1)$.

1228. Как расположена точка $(1; -1)$ по отношению к графику уравнения $y = \frac{1}{2}x - 2$: выше или ниже графика?

1229. Найдите ошибку в рассуждениях. Пусть a — произвольное число, отличное от нуля. Рассмотрим уравнение $x = a$. Умножив обе его части на $-4a$, получим $-4ax = -4a^2$. Прибавим к обеим частям уравнения слагаемое x^2 и перенесём слагаемое $-4a^2$ в левую часть, получим $x^2 - 4ax + 4a^2 = x^2$, или $(x - 2a)^2 = x^2$, откуда $x - 2a = x$. Но по условию $x = a$, откуда после подстановки будем иметь $a - 2a = a$ и $-a = a$. Следовательно, $a + a = 0$ и сумма любых двух равных чисел равна нулю.

? Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение решения уравнения с двумя переменными. Приведите пример.
2. Дайте определение линейного уравнения с двумя переменными. Приведите примеры.
3. Что является графиком линейного уравнения с двумя переменными? Рассмотрите различные случаи.
4. Приведите пример решения линейного уравнения с двумя переменными в целых числах.

§ 18. Системы линейных уравнений и способы их решения

45. Система линейных уравнений. Графическое решение системы

Задача 1. Сумма двух чисел равна 2. Чему равны эти числа?

Решение. Обозначив первое число буквой x, а второе число буквой y, составим уравнение:

$$x + y = 2.$$

Это линейное уравнение с двумя переменными имеет сколько угодно решений, например: $(1; 1)$, $(-5; 7)$, $(3; -1)$ и т. д.

Чтобы задача имела определённый ответ, необходимо ввести дополнительное условие, например указать разность тех же чисел. Пусть она равна 4. Получили новую задачу.

Задача 2. Сумма двух чисел равна 2, а их разность равна 4. Чему равны эти числа?

Решение. По условию задачи можно составить два уравнения с двумя переменными:

$$x + y = 2 \quad \text{и} \quad x - y = 4.$$

Теперь требуется найти все такие значения переменных, которые обращают оба уравнения в верные равенства, т. е. найти все общие решения этих уравнений. В таких случаях говорят, что надо решить *систему уравнений* $x + y = 2$ и $x - y = 4$. Систему уравнений обычно записывают с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

Общее решение уравнений, составляющих систему, называют *решением системы.*

Определение. Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.

Решением системы (1) является пара чисел (3; −1), так как верны равенства

$$3 + (-1) = 2 \quad \text{и} \quad 3 - (-1) = 4.$$

Никакая другая пара чисел решением системы (1) не является. Чтобы убедиться в этом, достаточно построить графики уравнений системы.

Графиком первого уравнения является прямая MN, а графиком второго уравнения — прямая PK (рис. 74). Эти прямые имеют лишь одну общую точку, а значит, и система (1) имеет лишь одно решение. Задача 2 имеет также один ответ — числа 3 и −1. Приближённое значение решения системы (1) можно было бы найти по рисунку, прочитав координаты точки пересечения графиков. Такой способ решения системы называется *графическим способом*.

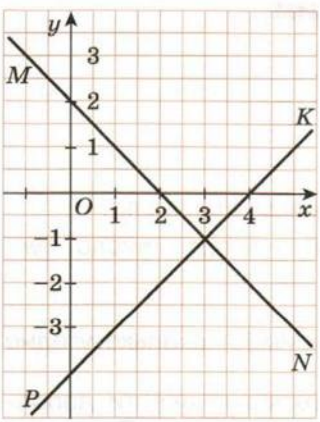


Рис. 74

! Чтобы решить систему уравнений графическим способом, надо построить графики уравнений этой системы и определить координаты каждой общей точки этих графиков.

Графики уравнений системы линейных уравнений с двумя переменными позволяют ответить на вопрос о числе решений системы. Рассмотрим это подробнее, ограничившись тем случаем, когда в каждом уравнении системы хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Тогда графиками уравнений являются прямые. Если эти прямые пересекаются, то система имеет одно решение; если прямые параллельны, то система не имеет решений; если прямые совпадают, то решений бесконечно много.

Пример 1. Выясним, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} -35x + 10y = 78, \\ 21x + 5y = 46. \end{cases}$$

Решим каждое из уравнений системы относительно y. Получим уравнения $y = 3{,}5x + 7{,}8$ и $y = -4{,}2x + 9{,}2$.

Уравнения $y = 3{,}5x + 7{,}8$ и $y = -4{,}2x + 9{,}2$ равносильны соответственно первому и второму уравнениям системы. Поэтому их графики те же, что и графики уравнений системы. Этими уравнениями задаются линейные функции, графики которых представляют собой прямые с различными угловыми коэффициентами. Значит, эти прямые пересекаются и система имеет единственное решение.

Пример 2. Выясним, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 4x - 2y = 3, \\ 8x - 4y = 1. \end{cases}$$

Решим уравнения системы относительно y. Получим уравнения $y = 2x - 1{,}5$ и $y = 2x - 0{,}25$, которыми задаются линейные функции. Прямые, являющиеся графиками этих функций, параллельны (так как угловые коэффициенты прямых равны) и пересекают ось y в различных точках. Следовательно, система уравнений не имеет решений.

Пример 3. Выясним, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ -4{,}5x + 3y = -6. \end{cases}$$

Решив уравнения системы относительно y, получим одно и то же уравнение $y = 1{,}5x - 2$. Это означает, что прямые, являющиеся графиками уравнений системы, совпадают. Следовательно, система имеет бесконечно много решений.

Упражнения

1230. Найдётся ли среди пар чисел (2; –3), (–1; 8) и (4; 4) решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 10x - 3y = 29, \\ -8x + y = -19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -6x + 2y = 22, \\ 15x + 3y = 9? \end{cases}$

1231. Является ли пара (–2,5; 1,5) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 4y = 1, \\ 3x - 2y = -10{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4x - 5y = 2{,}5, \\ 6x + 10y = 0{,}5? \end{cases}$

1232. Составьте систему двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой служит пара $(-1; -2)$.

1233. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} 4x + 5y = 9, \\ -3x + 6y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x - 6y = 0{,}8, \\ x - 1{,}2y = 0{,}4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1{,}2x - 2{,}4y = 8, \\ 3x - 6y = 20; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0, \\ 3x = 5 - 2y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}6x - 0{,}8y = -2, \\ 3x + 4y = 10; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4y = 2x - 1{,}2, \\ 7x = 5y + 1{,}4? \end{cases}$

1234. Найдите какие-либо три решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}6y = -0{,}9, \\ 0{,}2x - 0{,}4y = -0{,}6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}5x + 0{,}75y = 0{,}75, \\ 2{,}4x + 1{,}2y = 1{,}2. \end{cases}$

1235. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 3y = 0, \\ 0{,}5x - y = 2{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = -4, \\ 2x + 5y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2y = -7, \\ x - y = 0. \end{cases}$

1236. Найдите графическим способом решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3(x + y) - 2x = 4 + 2y, \\ x = 3(y + 1) - x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y - 2 = -y - 1, \\ -3(y - x) = 3 + x. \end{cases}$

Упражнения для повторения

1237. Представьте в виде многочлена:

а) $(2m + 3)^2 - 3(m - 4)(m + 4) - 56$;

б) $5(3 - 2a)(2a + 3) - 2(a - 5)^2 + 5$.

1238. Разложите на множители многочлен:

а) $9x^2 + 6xy + y^2 - z^2$; б) $16a - 16b - a^3 + a^2b$.

1239. Решите уравнение:

а) $3 \cdot \frac{4x - 1}{5} - 2x = 1$; в) $2 \cdot \frac{2 + 7y}{3} - 8y = -12$;

б) $5m + 2 \cdot \frac{2 - m}{2} = 11$; г) $6p - 3 \cdot \frac{5 + 2p}{5} = 21$.

1240. Решите в целых числах уравнение:

а) $2x - 3y = 5$; б) $2x + 3y = -5$.

1241. Спортсмен получил на некоторую сумму денег талоны достоинством в 300 р. и в 400 р., причём четырёхсотрублёвых было больше, чем трёхсотрублёвых. Пятую часть всех денег он истратил, отдав 2 талона за билет в кино. Половину оставшихся денег отдал за ужин, оплатив его тремя талонами. Сколько талонов каждого достоинства было вначале у спортсмена?

46. Способ подстановки

Графический способ даёт возможность решать системы уравнений лишь приближённо. Однако существуют другие способы, позволяющие находить точные решения систем линейных уравнений с двумя переменными. Рассмотрим один из них, называемый *способом подстановки*.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4, \\ x - 4y = 6. \end{cases} \qquad (1)$$

Решим второе уравнение относительно x:

$$x = 4y + 6.$$

Подставив в первое уравнение вместо переменной x выражение $4y + 6$, получим систему

$$\begin{cases} 3(4y + 6) + 2y = 4, \\ x = 4y + 6. \end{cases} \qquad (2)$$

Системы (1) и (2) равносильны, т. е. имеют одно и то же множество решений. Иными словами, всякое решение системы (1) является решением системы (2) и всякое решение системы (2) является решением системы (1).

Действительно, пусть пара чисел a и b — решение системы (1). Это означает, что верны равенства

$$3a + 2b = 4,$$
$$a - 4b = 6.$$

Так как уравнения $x - 4y = 6$ и $x = 4y + 6$ равносильны, то пара $(a; b)$ является решением уравнения $x = 4y + 6$, и поэтому верно равенство

$$a = 4b + 6.$$

Заменим в верном равенстве $3a + 2b = 4$ число a равным ему числом $4b + 6$, получим верное равенство

$$3(4b + 6) + 2b = 4.$$

Следовательно, пара $(a; b)$ обращает оба уравнения системы (2) в верные равенства. Поэтому она является решением системы (2).

Таким же образом можно доказать, что каждое решение системы (2) является решением системы (1).

Первое уравнение системы (2) представляет собой уравнение с одной переменной. Решим его:

$$12y + 18 + 2y = 4,$$
$$14y = -14,$$
$$y = -1.$$

Подставив во второе уравнение системы (2) вместо переменной y её значение -1, получим

$$x = 4 \cdot (-1) + 6,$$
$$x = 2.$$

Пара (2; −1) является единственным решением системы (2), а следовательно, и единственным решением системы (1).

Подведём итоги.

А При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки:

1) решают одно из уравнений относительно какой-либо переменной;
2) подставляют в другое уравнение вместо этой переменной найденное выражение;
3) решают полученное уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующее значение другой переменной.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 2y = 16, \\ 10x - 3y = 27. \end{cases}$$

Решим первое уравнение относительно y:

$$-2y = 16 - 5x,$$
$$2y = -16 + 5x,$$
$$y = \frac{5x - 16}{2}.$$

Подставив во второе уравнение вместо y выражение $\frac{5x-16}{2}$, получим систему

$$\begin{cases} y = \frac{5x - 16}{2}, \\ 10x - 3 \cdot \frac{5x - 16}{2} = 27. \end{cases}$$

Решим второе уравнение этой системы:

$$10x \cdot 2 - 3(5x - 16) = 2 \cdot 27,$$
$$20x - 15x + 48 = 54,$$
$$5x = 6,$$
$$x = 1{,}2.$$

Подставим в уравнение $y = \frac{5x-16}{2}$ вместо x число 1,2 и найдём соответствующее ему значение y:

$$y = \frac{5 \cdot 1{,}2 - 16}{2},$$
$$y = -5.$$

Ответ: (1,2; –5).

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x - 5y = -1, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 3. \end{cases}$

Упростим второе уравнение, умножив его левую и правую части на 6. Получим

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1, \\ 4x + 3y = 18. \end{cases}$$

Решим первое уравнение относительно x и подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{cases} x = \frac{5y-1}{3}, \\ 4 \cdot \frac{5y-1}{3} + 3y = 18. \end{cases}$$

Решим уравнение с одной переменной:

$$4(5y - 1) + 9y = 54,$$
$$20y - 4 + 9y = 54,$$
$$29y = 58,$$
$$y = 2.$$

Найдём соответствующее значение x:

$$x = \frac{5 \cdot 2 - 1}{3},$$
$$x = 3.$$

Ответ: (3; 2).

Упражнения

1242. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ 9x - 2y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ 6x + y = -9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ x - 5y = 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x + 4y = 11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - y = 10, \\ x = 2y - 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + 4y = -1, \\ x + y = 5. \end{cases}$

1243. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4x - 3y = -11, \\ 10x + 5y = 35; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -2x + 3y = 10, \\ 4x - 9y = -20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x - 2y = -16, \\ 8x - 7y = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 11x + 2y = 2, \\ -5x + 6y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x + 6y = 10, \\ 3x + 5y = -3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 9x - 2y = 35, \\ 3x - 4y = -5. \end{cases}$

1244. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 1{,}2m - 3n = 0, \\ 2m + 1{,}5n = -13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}2y = 0{,}3, \\ 0{,}6x - 0{,}5y = 0{,}1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b = \frac{3}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2}{3}p - \frac{3}{5}q = -1, \\ \frac{5}{6}p + \frac{7}{10}q = 6. \end{cases}$

1245. Каковы координаты точки пересечения графиков уравнений:

а) $7x + 6y = -2$ и $10x + 9y = -2$;

б) $16x - 25y = 5$ и $8x - 15y = -41$?

1246. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений:

а) $6x - 5y = 10$ и $9x - 10y = -25$;

б) $4x - 15y = 21$ и $6x + 25y = 22$.

1247. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 5x + 20 = -6y, \\ 9y - 25 = -2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2k - 3 = 2 - 9p, \\ 3k - 13 = 5p + 13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 14 - 3b = 4a, \\ 25 + 3b = 5a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 50 - 4m = 5 - 5n, \\ 21 - 6n = 26 + 5m. \end{cases}$

1248. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2(x - 5) + 6 = 3(2 - y) - 1, \\ 3(y + 2) - 10 = 3(1 - x) + 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -4(3 - b) - 6 = 5(2a + 1) + 5, \\ 2(3b - 4) + 7 = 7(1 - a) - 10. \end{cases}$

1249. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4(3x - 4y) + 14 = 3(5x + 2y), \\ -2(x - 6y) = 5(3x - 4y) - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1 - 2(x + 2y) = 5x + 12y, \\ 6(x - 4y) = 5(3x + 4y) - 13. \end{cases}$

1250. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{m}{4} - n = 7, \\ 3m + \dfrac{n}{2} = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x - \dfrac{2y}{3} = 1, \\ \dfrac{3x}{2} - \dfrac{y}{3} = -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} = -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{a}{6} + b = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{3p}{4} - \dfrac{2k}{3} = -1, \\ \dfrac{p}{2} + \dfrac{k}{3} = -3. \end{cases}$

1251. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{a}{3} - 2b = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

1252. Используя графики уравнений, изображённые на рисунке 75, объясните графический смысл равносильности систем уравнений

$\begin{cases} y - 0{,}5x = 5, \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

и

$\begin{cases} y = 0{,}5x + 5, \\ 2x + 3(0{,}5x + 5) = 1. \end{cases}$

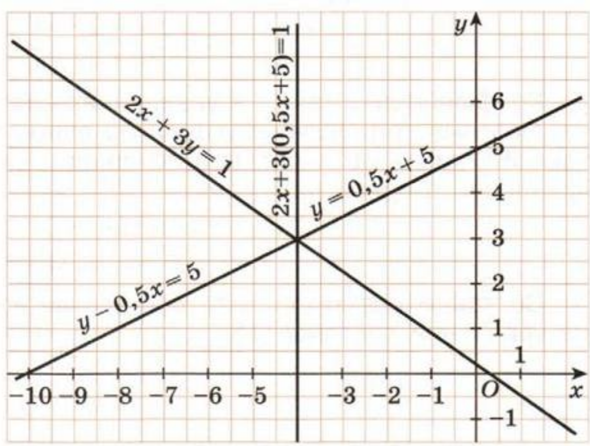


Рис. 75

Упражнения для повторения

1253. Постройте график уравнения:

а) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1$; в) $-0{,}1x + 0{,}5y = 0{,}4$;

б) $0{,}2x + 2y = -2$; г) $2{,}5x - 5 = 7{,}5y$.

1254. Упростите выражение:

а) $(3a - b)^2 - (3a + b)^2$; в) $16\left(\frac{3x}{4} - y\right)^2 - (3x + 4y)^2$;

б) $(3x + 4y)^2 + (3x - 4y)^2$; г) $81\left(\frac{a}{9} + \frac{b}{3}\right)^2 + 16\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{4}\right)^2$.

1255. Разложите на множители многочлен:

а) $4m^5 - 12m^3n^3 + 9mn^6$; в) $\left(\frac{1}{3}p - k\right)^2 - \frac{1}{9}p^2 + k^2$;

б) $\frac{1}{12}x^6y^2 + \frac{2}{3}x^3y^3 + \frac{4}{3}y^4$; г) $\frac{1}{9}p^2 - k^2 - \left(\frac{1}{3}p + k\right)^2$.

1256. Докажите, что ни одна точка графика функции $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$ не лежит ниже оси x.

47. Способ сложения

Рассмотрим ещё один способ решения систем уравнений, называемый <u>*способом сложения*</u>.

Пусть дана система

$$\begin{cases} 3x - 2y = 17, \\ 5x + 2y = 7. \end{cases} \qquad (1)$$

Коэффициенты при y в уравнениях системы — противоположные числа. Поэтому при сложении отдельно левых частей уравнений и их правых частей, или, как говорят, при почленном сложении уравнений, получится уравнение с одной переменной:

$$(3x - 2y) + (5x + 2y) = 17 + 7,$$
$$8x = 24.$$

Составим новую систему, состоящую из уравнения $8x = 24$ и одного из уравнений системы (1):

$$\begin{cases} 8x = 24, \\ 5x + 2y = 7. \end{cases} \qquad (2)$$

Системы (1) и (2) равносильны.

В самом деле, пусть пара чисел $(a;\ b)$ — решение системы (1).

Тогда верны равенства

$$3a - 2b = 17,$$
$$5a + 2b = 7.$$

При почленном сложении верных равенств получается верное равенство

$$(3a - 2b) + (5a + 2b) = 17 + 7.$$

Отсюда следует, что пара $(a;\ b)$ является решением уравнения $(3x - 2y) + (5x + 2y) = 17 + 7$, а значит, и решением системы (2).

Можно так же доказать, что любое решение системы (2) является решением системы (1).

Таким образом, системы (1) и (2) равносильны.

Из первого уравнения системы (2) получим

$$x = 3.$$

Найдём соответствующее значение y, используя при этом второе уравнение:

$$5 \cdot 3 + 2y = 7,$$
$$2y = -8,$$
$$y = -4.$$

Пара (3; −4) является единственным решением системы (2), а следовательно, и единственным решением системы (1).

В тех случаях, когда в системе нет переменной, при которой коэффициенты являются противоположными числами, можно получить такие коэффициенты, умножив левые и правые части уравнений на некоторые числа.

Подведём итоги.

А При решении системы двух уравнений с двумя переменными способом сложения:

1) умножают левую и правую части одного или обоих уравнений на некоторое число так, чтобы коэффициенты при одной из переменных в разных уравнениях стали противоположными числами;
2) складывают почленно полученные уравнения;
3) решают полученное уравнение с одной переменной;
4) находят соответствующее значение второй переменной.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 3x + 7y = 5. \end{cases}$$

Умножим левую и правую части первого уравнения на −3, а второго на 2:

$$\begin{cases} -6x + 9y = -33, \\ 6x + 14y = 10. \end{cases}$$

Сложив почленно уравнения, получим уравнение с одной переменной:

$$23y = -23.$$

Решив его, находим

$$y = -1.$$

Подставим в первое уравнение данной системы вместо переменной y её значение −1 и найдём соответствующее значение x:

$$2x + 3 = 11,$$
$$x = 4.$$

Ответ: (4; −1).

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 10y = 19, \\ -4x + 5y = -7. \end{cases}$$

В этом случае достаточно умножить на –2 левую и правую части лишь второго уравнения:

$$\begin{cases} 3x + 10y = 19, \\ 8x - 10y = 14. \end{cases}$$

Сложим почленно уравнения, получим уравнение с одной переменной:

$$11x = 33.$$

Решив его, найдём

$$x = 3.$$

Из второго уравнения данной системы найдём соответствующее значение y:

$$-4 \cdot 3 + 5y = -7,$$
$$5y = 5,$$
$$y = 1.$$

Ответ: (3; 1).

Упражнения

1257. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x - 4y = 22, \\ 7x + 4y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 10x - 3y = 5, \\ -6x - 3y = -27; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -6x + y = 21, \\ 6x - 11y = -51; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x + 4y = -22, \\ 5x - 2y = -4. \end{cases}$

1258. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 5x - 9y = 38, \\ 3x + 2y = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 21a - 30b = -6, \\ 23a - 40b = -28; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 11x + 4y = -18, \\ 13x - 6y = -32; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 6u + 5v = 10, \\ 5u - 6v = 49; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 10x + 7y = -1, \\ 15x + 8y = 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3m - 4n = 3, \\ -8m + 7n = 3. \end{cases}$

1259. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4m - 3n = 32, \\ 0{,}8m + 2{,}5n = -6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}3y = -1, \\ 1{,}5x + 0{,}4y = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2{,}5p + 1{,}5k = -13, \\ 2p - 5k = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}2a + 0{,}1b = -1, \\ 1{,}2a + 0{,}3b = 0. \end{cases}$

1260. Задайте линейную функцию формулой вида $y = ax + b$, если её график проходит через точки:

а) $K(-2; -1)$ и $P(3; 2)$; в) $A(6; 0)$ и $B(0; -4)$;

б) $C(-3; 3)$ и $D(4; -4)$; г) $M(0; 5)$ и $N(-3; 0)$.

1261. Напишите линейное уравнение с переменными x и y, графиком которого является прямая, проходящая через точки с координатами:

а) $(2;\ 2)$ и $(-1;\ -1)$;

б) $(6;\ -5)$ и $(-3;\ 4)$.

1262. График линейной функции пересекает ось x в точке с абсциссой 5, а ось y в точке с ординатой -4. Задайте эту функцию формулой.

1263. Отметьте в координатной плоскости две какие-нибудь точки. Проведите через них прямую. Напишите уравнение этой прямой.

1264. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3(2x - y) + 5 = -2(x + 3y) + 4, \\ 6(y + 1) - 1 = 5(2x - 1) + 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4(a - 3b) - 2a = 3(b + 4) - 11, \\ -3(b - 2a) - 12 = 2(a - 5) + b; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}5 - 3m = 2{,}5(m - 3n) - 3, \\ 19 + 9n = 3(m + 6n) + 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5u - 2v + 1 = 4(2u - v), \\ 0{,}2(4u + v) + 0{,}5 = 0{,}5(2u + 1). \end{cases}$

1265. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2(x - 3y) = 3x - 4y - 1, \\ 5(2y + x) - 4 = 3(2x - 1) + 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4p - 3k - 1 = 3(3p - 2k), \\ 1{,}5k + 2p = -2(2p - 0{,}5k) + 7. \end{cases}$

1266. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{2}u - \frac{2}{3}v = -1, \\ u + \frac{1}{3}v = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y = 0, \\ 2x - 1{,}7y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{3}{4}u + \frac{1}{2}v = -3, \\ 3u - \frac{1}{3}v = -5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{1}{4}m + \frac{2}{3}n = 3, \\ 0{,}3m + 0{,}2n = 0. \end{cases}$

1267. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{m}{2} + \frac{n}{2} = 1, \\ \frac{3m}{4} - n = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{u}{2} - \frac{v}{6} = 0, \\ \frac{3u}{4} + \frac{v}{3} = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{4p}{5} - \frac{5k}{6} = -2, \\ \frac{7p}{3} - 2k = -11; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{4y}{5} = 8, \\ \frac{5x}{6} - \frac{4y}{15} = -9. \end{cases}$

1268. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 2, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{4m}{5} + \frac{3n}{4} = -2, \\ -4m - 3n = 16. \end{cases}$

1269. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} -\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1, \\ 2x - 3y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{2}? \end{cases}$

1270. Используя графики уравнений, изображённые на рисунке 76, объясните графический смысл равносильности систем уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (2x - y) + (x + y) = 5 + 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

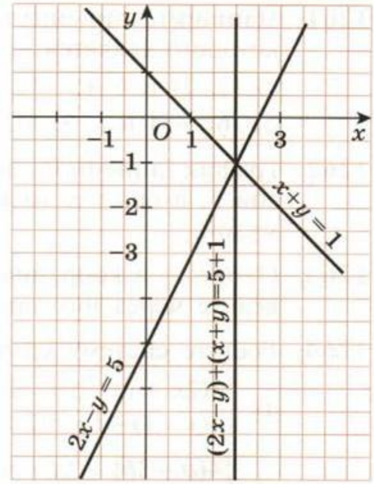


Рис. 76

1271. С помощью графиков уравнений, изображённых на рисунке 77, объясните графический смысл равносильности систем уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = -3, \\ 2x + 0{,}5y = -1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (x - 2y) + (2x + 0{,}5y) = -3 - 1, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

1272. Решите двумя способами (способом подстановки и способом сложения) систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - 13x = -113, \\ 40x - 3y = 350; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x - 3y = 34, \\ 5x + 6y = 8. \end{cases}$

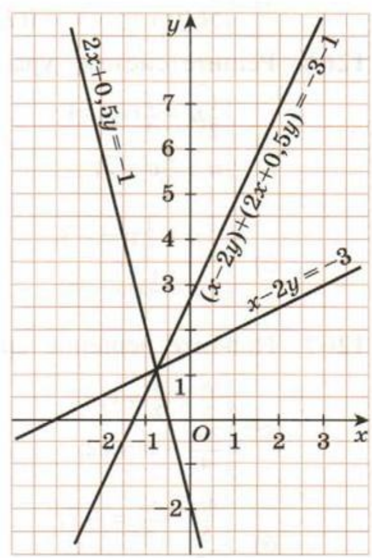


Рис. 77

Упражнения для повторения

1273. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(4m + 7)(7 - 4m) - (4m - 7)^2$;

б) $(5a + 2)^2 - (3 + 5a)(5a - 3)$.

1274. Разложите на множители многочлен:

а) $-8x^4 + 8y^4$; в) $75a^2 + 12b^2 + 60ab$;

б) $16m^4 - 16n^4$; г) $84x^2y - 63x^4 - 28y^2$.

1275. Для вычисления кубов чисел, близких к единице, можно использовать приближённую формулу $(1 + \alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha$. Найдите по этой формуле приближённое значение $1{,}1^3$ и $0{,}9^3$. На сколько оно отличается от точного значения?

48. Решение задач с помощью систем уравнений

До сих пор при решении задач с помощью уравнений мы составляли одно уравнение с одной переменной. Но часто бывает проще составить два уравнения с двумя переменными и решить задачу с помощью системы уравнений.

При этом поступают следующим образом:
1) обозначают некоторые неизвестные величины буквами;
2) составляют систему уравнений, используя условие задачи;
3) решают эту систему;
4) истолковывают результат в соответствии с условием задачи.

Приведём примеры решения задач с помощью системы уравнений.

Задача 1. Задуманы два числа. Если к первому числу прибавить удвоенное второе, то получится 30. Если из первого числа вычесть утроенное второе, то получится 5. Какие числа задуманы?

Решение. Пусть задуманы числа x и y. По условию задачи сумма чисел x и $2y$ равна 30, а разность чисел x и $3y$ равна 5.

Для ответа на вопрос задачи надо найти такие значения x и y, которые удовлетворяют уравнениям $x + 2y = 30$ и $x - 3y = 5$, т. е. удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 30, \\ x - 3y = 5. \end{cases}$$

Решив систему, найдём $x = 20$ и $y = 5$.

Ответ: 20 и 5.

Задача 2. Существуют ли два таких натуральных числа, что сумма первого числа и утроенного второго равна 10, а разность первого и утроенного второго равна 2?

Решение. Пусть первое число есть x, а второе число есть y. По условию задачи сумма чисел x и $3y$ равна 10, а разность чисел x и $3y$ равна 2. Тогда можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 10, \\ x - 3y = 2. \end{cases}$$

Решив систему, найдём

$$x = 6 \text{ и } y = 1\frac{1}{3}.$$

Пара чисел 6 и $1\frac{1}{3}$ удовлетворяет системе уравнений, но не удовлетворяет условию задачи, так как число $1\frac{1}{3}$ не является натуральным.

Ответ: таких чисел не существует.

Упражнения

1276. Разность двух чисел равна 20, а их сумма равна 4. Найдите эти числа.

1277. Ремонтом дома занимаются 18 маляров и штукатуров. Сколько маляров занимаются ремонтом, если их на 4 меньше, чем штукатуров?

1278. За некоторое время через перекрёсток прошло 35 автомобилей. Из них легковых было на 5 больше, чем грузовых. Сколько легковых и сколько грузовых автомобилей прошло через перекрёсток за это время?

1279. В мастерской сшили 65 курток и спортивных костюмов. Сколько сшили курток и сколько спортивных костюмов, если курток сшили в 1,6 раза больше, чем спортивных костюмов?

1280. Было продано 42 л яблочного и апельсинового сока. Яблочного сока было продано в 2,5 раза меньше, чем апельсинового. Сколько литров апельсинового сока было продано?

1281. В одном из классов гимназии мальчиков в 1,2 раза больше, чем девочек. Сколько девочек в этом классе, если их на две меньше, чем мальчиков?

1282. Периметр равнобедренного треугольника равен 19 см. Его боковая сторона на 1 см меньше основания. Найдите стороны треугольника.

1283. Боковая сторона равнобедренного треугольника в 4 раза больше его основания. Найдите основание треугольника, если оно меньше боковой стороны на 6 см.

1284. Периметр прямоугольника равен 66 см. Его длина в 10 раз больше ширины. Найдите стороны прямоугольника.

1285. Масса 2 см^3 меди и 4 см^3 серебра равна 59 г. Плотность меди меньше плотности серебра на 2 г/см^3. Найдите плотность меди и плотность серебра.

1286. Дачник проделал путь длиной 46 км. Он шёл 2 ч пешком и 3 ч ехал на велосипеде. На велосипеде он двигался в 2,4 раза быстрее, чем пешком. С какой скоростью дачник шёл и с какой скоростью он ехал на велосипеде?

1287. За 4 мин через первую трубу поступило воды на 1 гл меньше, чем за 3 мин через вторую трубу. Если первую трубу открыть на 5 мин, а вторую на 1 мин, то поступит 32 гл воды. Сколько гектолитров воды поступает за 1 мин через каждую трубу?

1288. Теплоход проходит за 4 ч по течению такое же расстояние, какое за 5 ч против течения. Найдите скорость течения, если она меньше собственной скорости теплохода на 40 км/ч.

1289. Двигаясь 2 ч против течения и 4 ч по течению, теплоход прошёл 260 км. Тот же теплоход за 8 ч по течению пройдёт столько же, сколько он пройдёт за 9 ч против течения. Найдите скорость теплохода по течению и его скорость против течения.

1290. Собственная скорость моторной лодки больше скорости течения в 4 раза. Найдите скорость лодки по течению, если за 1 ч против течения и $\frac{1}{3}$ ч по течению лодка пройдёт 14 км.

1291. Двигаясь 3 ч по течению и 4 ч против течения, катер прошёл 120 км. Тот же катер за 2 ч против течения пройдёт на 30 км меньше, чем за 3 ч по течению. Найдите скорость катера по течению и его скорость против течения.

1292. Из двух пунктов, расстояние между которыми 120 км, выезжают одновременно велосипедист и автомобилист. Если они будут двигаться навстречу друг другу, то встреча произойдёт через $1\frac{1}{2}$ ч. Если же автомобилист будет двигаться вслед за велосипедистом, то он догонит его через 3 ч. Найдите скорость, с которой двигаются велосипедист и автомобилист.

1293. Из двух усадеб, расстояние между которыми 44 км, выехали одновременно два всадника и встретились через 2 ч. Найдите скорость каждого всадника, если один из них проехал до встречи на 4 км больше другого.

1294. Два пешехода вышли одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми 25 км, и встретились через 2,5 ч. Найдите скорость каждого из них, если один прошёл до встречи расстояние в 1,5 раза больше, чем другой.

1295. Сумма $\frac{3}{4}$ первого числа и $\frac{2}{5}$ второго равна 15. Найдите эти числа, если $\frac{3}{5}$ второго числа на 1 меньше, чем $\frac{5}{6}$ первого.

1296. Найдите два числа, если $\frac{9}{10}$ первого на 4 больше, чем $\frac{7}{15}$ второго, а $\frac{3}{5}$ первого на 9 меньше, чем $\frac{7}{10}$ второго.

1297. В прошлом году пшеницей было засеяно на 30 га больше, чем рожью. Теперь посевы пшеницы сократились на 25%, а ржи — на 20%, и площадь под ними составила 100 га. Сколько гектаров засеяли в прошлом году пшеницей и сколько рожью?

1298. В двух табунах было 120 лошадей. Когда число лошадей в первом табуне увеличилось на 40%, а во втором уменьшилось на 10%, в первом табуне стало на 30 лошадей больше, чем во втором. Сколько лошадей было в каждом табуне?

1299. В десяти лодках может разместиться 44 человека. Часть этих лодок пятиместные, а остальные — трёхместные. Сколько пятиместных лодок?

1300. От лагеря до почты турист ехал на велосипеде со скоростью 18 км/ч. На обратном пути его скорость была на 3 км/ч меньше. Весь путь он проехал за 2 ч. Найдите расстояние от лагеря до почты.

1301. В копилке лежало 92 р. пятирублёвыми и двухрублёвыми монетами. Сколько пятирублёвых и сколько двухрублёвых монет лежало в копилке, если всего было 28 монет?

1302. Расстояние между двумя пристанями лодка проплывает по реке в одном направлении за 4 ч, а в противоположном направлении за 8 ч. Скорость течения воды 5 км/ч. Каково расстояние между пристанями?

1303. Первый рабочий изготовил за 4 ч на 10 деталей больше, чем второй за 5 ч. Второй изготавливал в час на три детали меньше, чем первый. Сколько деталей изготовил первый рабочий за 4 ч?

1304. Из двух пунктов, расстояние между которыми 60 км, должны выехать навстречу друг другу два велосипедиста. Если первый велосипедист выезжает на 1 ч раньше второго, то он встретит его через 3 ч после своего выезда. Если второй велосипедист выезжает на 2 ч раньше первого, то они встретятся через $3\frac{1}{5}$ ч после выезда второго. Найдите скорости велосипедистов.

1305. Три гантели и две гири весят 47 кг. Найдите, сколько весит гиря и сколько — гантель, если известно, что три гири тяжелее шести гантелей на 18 кг.

1306. Решите задачу двумя способами (с помощью уравнения с одной переменной и с помощью системы двух уравнений с двумя переменными).

Задумано два числа. Если к первому числу прибавить удвоенное второе, то получится 27. Если из утроенного первого вычесть второе, то получится 11. Найдите эти числа.

Упражнения для повторения

1307. Разложите на множители:

а) $24a^4x - 6b^2x - 12a^4y + 3b^2y$;

б) $36n - 2m^3 + 18m - 4m^2n$.

1308. Упростите выражение:

а) $9(4 - 3x)^2 - 4(2x + 1)^2$;

б) $3(3 - 4a)(4a + 3) + 2(2a + 3)^2$.

1309. Докажите тождество

$$(a^3 - b^3)^2 + 2a^3b^3 = (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2).$$

49. Система линейных уравнений с тремя переменными

Уравнение вида $ax + by + cz = d$, где x, y и z — переменные, a, b c, d — некоторые числа, называется *линейным уравнением с тремя переменными*.

Тройка значений переменных, обращающая уравнение с тремя переменными в верное равенство, называется *решением уравнения*.

Будем рассматривать системы трёх линейных уравнений с тремя переменными. Общее решение этих уравнений является решением системы. Решить систему — значит найти множество общих решений входящих в неё уравнений.

При решении системы линейных уравнений с тремя переменными, так же как при решении систем линейных уравнений с двумя переменными, используют способ подстановки и способ сложения.

Решим систему

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 19, \\ 4x - y - 3z = 8, \\ 2x - 2y - 3z = 1. \end{cases}$$

Исключим одну из переменных, воспользовавшись способом подстановки. Выразим из второго уравнения переменную y через x и z:

$$y = 4x - 3z - 8.$$

Подставив в первое и третье уравнения вместо y выражение $4x - 3z - 8$, получим систему двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} 3x + 5(4x - 3z - 8) + 2z = 19, \\ 2x - 2(4x - 3z - 8) - 3z = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 23x - 13z = 59, \\ -6x + 3z = -15. \end{cases}$$

Упростим второе уравнение, разделив обе его части на –3. Получим

$$\begin{cases} 23x - 13z = 59, \\ 2x - z = 5. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что

$$x = 2,\ z = -1.$$

Соответствующее значение y найдём из уравнения $y = 4x - 3z - 8$:

$$y = 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - 8,\ y = 3.$$

Значит, решением системы является тройка чисел:

$$x = 2,\ y = 3,\ z = -1.$$

Заметим, что исключить одну из переменных в рассматриваемой системе трёх уравнений с тремя переменными мы могли бы иначе, используя способ сложения.

Аналогично решаются системы четырёх уравнений с четырьмя переменными, пяти уравнений с пятью переменными и т. д.

Упражнения

1310. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 8, \\ y + z = 7, \\ x - z = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ y - z = 7, \\ x + z = -1. \end{cases}$

1311. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 8, \\ y + z = 5, \\ x + z = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 6, \\ 4y + z = -27, \\ x + z = -11. \end{cases}$

1312. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 10x - 5y - 3z = -9, \\ 6x + 4y - 5z = -1, \\ 3x - 4y - 6z = -23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -10, \\ 4x - 2y - 3z = 27, \\ -5x + 4y + 2z = -28. \end{cases}$

1313. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} 9x - 8y + z + 12 = 0, \\ -4x + 2y - 3z + 9 = 0, \\ 2x - 5y + 2z - 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 4y - 3z - 20 = 0, \\ 2x - 3y - 4z + 5 = 0, \\ 2x + 5y - 4z + 45 = 0. \end{cases}$

1314. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z + v = 10, \\ y + z + v + u = 14, \\ z + v + u + x = 13, \\ v + u + x + y = 12, \\ u + x + y + z = 11. \end{cases}$$

1315. Решите относительно x, y и z систему уравнений:

$$\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0, \\ b^3 + b^2x + by + z = 0, \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0, \end{cases}$$

если $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

1316. В трёх сосудах 48 л воды. Если из первого сосуда перелить во второй 3 л, то воды в этих двух сосудах будет поровну, а если из третьего сосуда перелить во второй 3 л, то в третьем сосуде воды окажется в 7 раз меньше, чем во втором. Сколько воды в каждом сосуде?

1317. Периметр треугольника равен 3 дм. Наибольшая из сторон на 4 см больше наименьшей, а удвоенная третья сторона равна сумме двух других сторон. Найдите стороны треугольника.

Упражнения для повторения

1318. Упростите выражение:

а) $(a - b)^3 + 4(a + b)^3$; б) $(x + y)^3 - (x - y)^3$.

1319. Разложите на множители:

а) $x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2$;

б) $8x^6 + y^3 + 12x^4y + 6x^2y^2$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение решения системы уравнений с двумя переменными. Приведите пример.
2. Как решить систему двух уравнений с двумя переменными способом подстановки?
3. Как решить систему двух уравнений с двумя переменными способом сложения?

Дополнительные упражнения к главе 8

К параграфу 17

1320. Какие пары целых чисел являются решениями уравнения:

а) $mn = 8$; б) $mn = -8$; в) $mn = 0$?

1321. Найдите все пары простых чисел, являющихся решениями уравнения:

а) $p + q = 22$; б) $pq = 15$.

1322. Докажите, что никакая пара целых чисел не может быть решением уравнения:

а) $2x + 4y = 35$; б) $15x - 10y = 22$.

1323. При каком значении k пара чисел $(-2; 5)$ является решением уравнения:

а) $kx + 3y = 9$; б) $2x - ky = 1$?

1324. Купили несколько коробок с карандашами. В некоторых из них было по 6 карандашей, а в остальных — по 8. Во всех коробках было 34 карандаша. Сколько купили коробок, в которых было по 6 карандашей?

1325. Три рыбака вечером наловили рыбы и легли спать. Первый, проснувшись утром, решил не будить остальных. Он разделил рыбу из садка поровну, но одна рыба осталась лишней; он выбросил её в воду, забрал третью часть улова и уехал домой. Через час встал второй. Думая, что он проснулся первым, и не желая будить остальных, проделал то же самое, что и первый: выкинул в воду лишнюю рыбу, взял третью часть от оставшегося улова и уехал. Ещё через час всё это повторил третий рыбак, тоже считая, что он встал первым. Каков был улов?

1326. В каких точках график уравнения $x^2 - y = 4$ пересекает:

а) ось x; б) ось y?

1327. Проходит ли график уравнения $(x + 5)(x - 5) - (y + 6)(y - 6) = 11$ через начало координат?

1328. Имеются ли на графике уравнения $4x + xy = 0$ точки, у которых:

а) абсцисса равна ординате;

б) абсцисса и ордината — противоположные числа?

1329. Графику уравнения $5x + 2y = 3$ не принадлежит ни одной точки, обе координаты которых — отрицательные числа. Докажите это утверждение и объясните его геометрический смысл.

1330. Докажите, что графику уравнения $2x^2 - 4y = 11$ не принадлежит ни одной точки с целочисленными координатами.

1331. Дана точка $A(0{,}1;\ 10)$. При каком значении k через эту точку проходит график уравнения:

а) $20x - 1{,}5y = k$; б) $y - kx = 5$?

1332. Постройте график уравнения:

а) $10(0{,}2x - 0{,}3y) - 0{,}5(6x - 8y) = 7$;

б) $5(0{,}6x + 0{,}4y) - 0{,}2(10x + 20y) = 4$;

в) $4(1{,}5x - 2{,}5) + 5(1{,}2y + 0{,}8) = -3$;

г) $0{,}6(0{,}5x + 1) + 0{,}4(1{,}5y - 2) = 0{,}7$.

1333. Начертите график уравнения:

а) $x(y - 3) = 0$; в) $(x - 2)(y + 2) = 0$;

б) $(x - 4)(y - 1) = 0$; г) $(x + 5)(y + 3) = 0$.

1334. Постройте график уравнения:

а) $x + |y| = 0$; в) $x - |y| = 0$;

б) $|x| + y = 0$; г) $|x| - y = 0$.

1335. Что является графиком уравнения:

а) $|x| + |y| = 0$; б) $|x| - |y| = 0$?

1336. При каком значении c прямые $4x + 3y = c$ и $2x - 3y = 8$ пересекаются в точке, принадлежащей:

а) оси x; б) оси y?

К параграфу 18

1337. При каких значениях m и b пара $(m;\ 3)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} -3x + y = 9, \\ 2x - by = -10? \end{cases}$$

1338. При каких значениях m и n пара $(3;\ -2)$ является решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} -5x + 2y = m, \\ 3x - 4y = n; \end{cases}$ б) $\begin{cases} mn - 3y = 9, \\ 6x + ny = 22? \end{cases}$

1339. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 6y = 5, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}5x + 2y = 0{,}8, \\ 2{,}5x + 10y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x - 3y = 12, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 0{,}3y = 1, \\ 4x + 0{,}6y = 1? \end{cases}$

1340. Найдите графическим способом приближённое решение системы уравнений: $\begin{cases}5(0,2x-0,4)-4(0,5y+1)=-3,\\2(1,5x+1)+1,5(2y-4)=-4.\end{cases}$

1341. Укажите какие-либо значения a, b и c, при которых система уравнений

$$\begin{cases}-8x+9y=10,\\ax+by=c\end{cases}$$

имеет единственное решение.

1342. При каком значении c система уравнений

$$\begin{cases}5x-2y=3,\\10x-4y=c\end{cases}$$

а) имеет бесконечное множество решений;
б) не имеет решений?

1343. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}10x-43y=27,\\4x+3y=31;\end{cases}$ г) $\begin{cases}21m+20n=123,\\42m-30n=36;\end{cases}$

б) $\begin{cases}-12x+15y=150,\\6x-7y=-72;\end{cases}$ д) $\begin{cases}8p-25q=65,\\6p+27q=3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}11a-5b=1,\\14a+2b=-74;\end{cases}$ е) $\begin{cases}13a-14b=-54,\\11a-7b=-36.\end{cases}$

1344. При каком значении a прямая $ax+5y=9$ проходит через точку пересечения прямых $5x+4y=6$ и $3x-y=7$?

1345. Докажите, что прямая $4x-5y=18$ проходит через точку пересечения прямых $-3x+2y=-10$ и $7x+6y=2$.

1346. Докажите, что прямые $-2x+9y=-3$, $2x-5y=-1$ и $3x-4y=-5$ пересекаются в одной точке. Каковы координаты этой точки?

1347. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}3(2x+y-1)=5x+4y+2,\\4(x-2y+1)=2x-5y+16;\end{cases}$

б) $\begin{cases}4x-2(3x-5)=3(x-y)+30,\\4y-2(3y-5)=3(y-x)-18;\end{cases}$

в) $\begin{cases}5(1,2x-2y)+40=2(y-2x)-4,\\2(1,5+3x)-30=5(x-3y)+4;\end{cases}$

г) $\begin{cases}6x-3(4x+1)-7=4y-5(y+3)+7,\\3y-\frac{1}{2}(x-4)-19=2x+\frac{1}{3}(x+3y)-4.\end{cases}$

1348. Найдите решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{m}{3} - \frac{n}{6} = -1, \\ m + \frac{n}{2} = -9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{3x-1}{4} = \frac{4y-1}{3}, \\ 5x = 8y + 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{a}{10} - \frac{b}{5} = 4, \\ \frac{a}{5} - b = -13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x = 9y - 6, \\ \frac{5y-12}{6} = \frac{5x-3}{9}. \end{cases}$

1349. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 1,2x - 2,5y = 4, \\ -1,4x + 1,5y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0,4m - 0,9n = -0,1, \\ 0,6m - 0,3n = 0,2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3,5a + 2,4b = 5,8, \\ 0,5a + 3,2b = -0,6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1,2x - 1,5y = 0,1, \\ 1,5x - 0,5y = -1,3. \end{cases}$

1350. Решите уравнение:

а) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$;

б) $4x^2 + 4x + 1 + (y - 3)^2 = 0$;

в) $(x - y + 1)^2 + (2x - y - 1)^2 = 0$;

г) $(2x + y)^2 + (x - 2y - 5)^2 = 0$.

1351. Напишите линейное уравнение вида:

а) $ax + by = 1$, график которого проходит через точки $A(2; 3)$ и $B(5; 6)$;

б) $2x + by = c$, график которого проходит через точки $M(-1; 4)$ и $N(4; -2)$;

в) $ax - 6y = c$, график которого проходит через точки $P(5; 0)$ и $K(-3; -3)$;

г) $y = kx + b$, график которого проходит через точки $C(-4; 2)$ и $D(2; 4)$.

1352. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точки:

а) $(-1; 3)$ и $(2; -2)$; в) $(0; 5)$ и $(4; 0)$;

б) $(4; 1)$ и $(-3; -1)$; г) $(-3; 0)$ и $(0; -6)$.

1353. График какой линейной функции проходит через точку $(-2; 5)$ и точку пересечения прямых

$$3x - 2y = 16 \quad \text{и} \quad 4x + 3y = -7?$$

1354. Периметр равностороннего пятиугольника на 1 см больше периметра равностороннего шестиугольника. Сумма длин трёх сторон этого шестиугольника на 2 см больше суммы длин двух сторон пятиугольника. Найдите периметр пятиугольника.

1355. Масса трёх чайных ложек и двух вилок равна 360 г. Найдите массу чайной ложки, если масса трёх вилок меньше массы пяти чайных ложек на 30 г.

1356. Фермер вспахал $\frac{1}{5}$ часть первого участка и $\frac{1}{3}$ второго, что составило 9 га. Найдите площадь каждого участка, если половина оставшейся части второго участка на 5 га меньше половины первого участка.

1357. На митинге присутствовали мужчины и женщины. После того как к ним присоединилось ещё 1,8 тыс. мужчин, мужчин на митинге стало на 800 больше, чем женщин. Сколько мужчин было на митинге вначале, если половина их числа составляла столько же, сколько составляла $\frac{1}{3}$ числа женщин?

1358. Открыли два крана: первый на 5 мин, второй на 4 мин. За это время в бак поступило 120 л воды. Если бы через первый кран вливалось воды вдвое меньше, а через второй втрое меньше, то за это же время в бак поступило бы лишь 50 л воды. Сколько воды вливалось через первый кран за 1 мин?

1359. Если увеличить ширину прямоугольника на 10%, а длину на 20%, то его периметр увеличится на 16 см. Если же уменьшить ширину на 20%, а длину на 10%, то периметр уменьшится на 14 см. Найдите длину и ширину прямоугольника.

1360. Два подрядчика в январе заготовили 900 м^3 леса. В феврале первый подрядчик уменьшил заготовку на 15%, второй — на 20%, причём первый заготовил на 60 м^3 леса меньше, чем второй. Сколько леса заготовил каждый из них в феврале?

1361. В этом году с 20 га площади, засеянной пшеницей, и 30 га площади, засеянной рожью, собрали 1200 ц зерна. В следующем году при увеличении урожайности пшеницы на 10% и ржи на 5% с тех же площадей должны собрать зерна на 90 ц больше. Сколько пшеницы и сколько ржи должны собрать в следующем году с каждого гектара?

1362. Задумали два числа. Если первое число увеличить на 40%, а второе — на 30%, то их сумма увеличится на 170. Если полученные при увеличении числа уменьшить соответственно на 40% и 30%, то их сумма уменьшится на 229. Найдите задуманные числа.

1363. (*Задача Л. Н. Толстого.*) Артели косцов предстояло скосить два луга, из которых один был вдвое больше другого. Полдня вся артель косила большой луг, а на вторую половину дня артель разделилась пополам, и одна половина осталась докашивать большой луг, а другая стала косить малый луг. К вечеру большой луг был скошен, а от малого остался участок, который был скошен на другой день одним косцом, работавшим весь день. Сколько было косцов в артели?

Задачи повышенной трудности

1364. Докажите, что если к трёхзначному числу приписать справа то же число, то полученное шестизначное число будет кратно 7, 11 и 13.

1365. Написали двузначное число. Затем приписали к нему слева и справа цифру 2. Получилось число, которое в 32 раза больше написанного двузначного числа. Найдите это двузначное число.

1366. Четырёхзначное число оканчивается цифрой 4. Если эту цифру переставить в начало числа, то число уменьшится на 1107. Найдите это четырёхзначное число.

1367. Докажите, что значение выражения $91^{10} + 42^{10} - 85^{10}$ кратно 10.

1368. Найдите двузначное число $\overline{ab}$, которое при делении на b в частном даёт b, а в остатке даёт a.

1369. Докажите, что если любое двузначное число написать три раза подряд, то полученное шестизначное число будет кратно 7.

1370. Докажите, что число $\underbrace{111...1}_{81 \text{ раз}}$ кратно 81.

1371. Докажите, что всякое простое число, большее трёх, имеет вид $6k + 1$ или $6k + 5$, где $k = 0$ или $k \in N$.

1372. Докажите, что если сумма трёх последовательных натуральных чисел нечётна, то их произведение кратно 24.

1373. Известно, что четырёхзначное число вида $\overline{abba}$ является кубом натурального числа. Найдите это четырёхзначное число.

1374. Найдите натуральное число, квадрат которого имеет вид:

а) $\overline{abbb}$; б) $\overline{aabb}$.

1375. Найдите множество трёхзначных чисел, первые две цифры которых образуют число, являющееся квадратом, а последние две — кубом натурального числа.

1376. Найдите множество чисел вида $\overline{abc}$, для которых выполняется равенство $\overline{ab} - \overline{bc} = 5$.

1377. Трёхзначное число $\overline{abc}$ таково, что $\overline{ab}$ кратно 18, а $\overline{bc}$ — простое число. Найдите множество всех таких чисел.

1378. Докажите, что если $n \in N$, то:

а) $\frac{5^n - 1}{4} \in N$; б) $\frac{9^{2n} - 1}{10} \in N$.

1379. Докажите, что число вида $\overline{abbb} - a$ делится на 37.

1380. Найдите правильную дробь, большую $\frac{1}{3}$, при увеличении числителя которой на некоторое натуральное число и умножении знаменателя на то же число значение дроби не изменяется.

1381. Цены повысились на 25%. На сколько процентов меньше товаров можно купить на ту же зарплату? Какой результат получится при понижении цен на 25%?

1382. Как изменится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 25%, а ширину уменьшить на 25%? Сделайте геометрическую иллюстрацию.

1383. Взяли 100 кг вещества, в котором содержится 99% воды. Сколько воды испарится при подсушивании этого вещества, если его влажность снизится до 98%?

1384. Найдите все целые значения m, при которых корень уравнения $mx + 5x = 20$ является натуральным числом.

1385. Разложите на множители многочлен:

а) $x^3 - 5x + 2$; б) $y^8 + y^4 + 1$.

1386. При каком натуральном n значение выражения $n^4 + 4$ является простым числом?

1387. Найдите какое-нибудь натуральное значение n, при котором дробь $\frac{5n+6}{8n+7}$ сократима.

1388. Разложите на множители многочлен:

а) $y^3 - 4y^2 + 4y - 1$; б) $y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 6y - 3$.

1389. Представьте многочлен $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ в виде квадрата многочлена.

1390. Докажите, что если a не делится на 5, то $a^4 - 1$ делится на 5.

1391. Докажите, что если квадрат натурального числа, не кратного 3, уменьшить на 1, то в результате получится число, кратное 3.

1392. Найдите натуральные числа, разность квадратов которых равна 455.

1393. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $5n^2 + 10$ не может быть квадратом натурального числа.

1394. Докажите, что при любом целом значении m значение выражения $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ является целым числом.

1395. Найдите уравнение прямой вида $ax + by + c = 0$, если эта прямая проходит через все точки, абсциссы которых на 1 больше их ординат.

1396. Постройте график уравнения:

а) $(x - y)(x + y) = 0$; г) $x^2 - 9 = 0$;

б) $(x - 2)(y + 2) = 0$; д) $y^2 - 1 = 0$;

в) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$; е) $(x - 2)(y^2 - 9) = 0$.

1397. Постройте график уравнения:

а) $y = |x| + x$;

б) $y = x - |x|$;

в) $|x| - x = |y| - y$.

1398. Постройте график уравнения:

а) $(x^2 - 9)(y^2 - 9) = 0$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-3 \leqslant y \leqslant 3$;

б) $xy^2 + y^3 - 4x - 4y = 0$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

1399. Постройте график функции:

а) $y = |x - 5| + |x + 5|$;

б) $y = |x - 1| - |x + 2|$;

в) $y = |x + 2| - 2$, если $-4 \leqslant x \leqslant 2$;

г) $y = |x - 6| - 2$, если $2 \leqslant x \leqslant 8$.

1400. Известно, что сумма коэффициентов уравнения $ax + by + c = 0$ равна нулю. Докажите, что график этого уравнения проходит через точку $(1; 1)$.

1401. Решите уравнение $xy = 3(x + y) - 5$, где x и y — целые числа.

1402. Докажите, что уравнение $x^2 - y^2 = 12$ имеет решение в целых числах, а уравнение $x^2 - y^2 = 18$ не имеет.

1403. Решите уравнение:

а) $|2x - 3| = 11$; б) $|6 - 1{,}5x| = 3$.

1404. Даны пары чисел x и y: (3; 5), (107; 192), (211; 379), (314; 565), (419; 753). Из всех перечисленных пар одна и только одна не является решением уравнения $187x - 104y = 41$. Какая именно пара?

1405. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} |x+1| + |y-1| = 5, \\ |x+1| = 4y - 4. \end{cases}$$

1406. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ y - z = 9, \\ z + x = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 4, \\ y + z = -2, \\ z + x = 6; \end{cases}$

1407. Всадник и пешеход одновременно отправились из пункта A в пункт B. Всадник прибыл в пункт B на 1,5 ч раньше пешехода и тут же возвратился в пункт A. Весь путь у него занял 3 ч. На обратном пути он встретил пешехода в 5 км от пункта B. Найдите скорость всадника и скорость пешехода, а также расстояние от пункта A до пункта B.

1408. Два брата ходят из школы домой с одинаковой скоростью. Однажды через 15 мин после выхода из школы первый побежал обратно в школу и, добежав до неё, немедленно бросился догонять второго. Оставшись один, второй продолжал идти домой в 2 раза медленнее. Когда первый брат догнал второго, они пошли с первоначальной скоростью и пришли домой на 6 мин позже обычного. Во сколько раз скорость бега первого брата больше скорости ходьбы братьев?

1409. Два парома курсируют между двумя берегами реки с постоянными скоростями. Достигнув берега, каждый из них тут же отправляется обратно. Паромы отчалили от противоположных берегов одновременно и первый раз встретились в 700 м от одного из берегов, поплыли дальше каждый к соответствующему берегу, затем повернули назад и вновь встретились в 400 м от другого берега. Найдите ширину реки.

1410. Если человек идёт пешком на работу, а обратно возвращается на транспорте, то всего он затрачивает на дорогу полтора часа. Если же в оба конца он едет на транспорте, то весь путь занимает у него полчаса. Какое время затратит этот человек на дорогу, если и на работу, и обратно он пойдёт пешком?

ОТВЕТЫ

Глава 1

К параграфу 1. **7.** а) A — множество натуральных чисел, кратных 3 и не больших 30; б) B — множество двузначных чисел, кратных 17; в) C — множество двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 7; г) D — множество простых двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 3. **12.** а) $\left\{\frac{2}{9}; \frac{4}{9}; \frac{1}{8}; \frac{3}{8}; \frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right\}$. **13.** б) {11; 15; 17; 51; 55; 57; 71; 75; 77}; в) {10; 11; 15; 50; 51; 55}. **14.** а) {222; 227; 272; 277; 722; 727; 772; 777}; б) {200; 202; 207; 220; 222; 227; 270; 272; 277; 700; 702; 707; 720; 722; 727; 770; 772; 777}. **18.** 2,1 т. **19.** 1740 р. **25.** а) {18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81; 90}; б) {91; 80}; в) {16; 23; 32; 61}; г) {22}. **30.** 0,9 т.

К параграфу 2. **34.** а) 0,1; б) 2,5; в) $-2\frac{1}{3}$; г) $-1{,}5$. **35.** а) 360; б) $-\frac{2}{7}$; в) 250; г) $-24{,}8$. **36.** а) $1\frac{2}{3}$; б) -1; в) 1; г) $1\frac{8}{13}$. **38.** а) $\frac{4}{21}$; б) $\frac{1}{20}$; в) 0,8; г) $\frac{5}{11}$. **39.** $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. **40.** $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. **41.** 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. **44.** $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{12}$. **45.** а) Например, $\frac{2}{21}$ и $\frac{13}{21}$; б) например, $\frac{5}{27}$ и $\frac{2}{27}$; в) например, $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$; г) например, $\frac{3}{7}$ и $\frac{5}{7}$. **52.** $-\frac{31}{41}$; 0,7; $-\frac{37}{500}$. **53.** Например, $\frac{45}{110}, \frac{46}{110}, \frac{47}{110}, \frac{48}{110}, \frac{49}{110}$. **58.** б) 30%; г) 130%. **61.** Объём, среднее арифметическое, размах, мода, медиана выборки: а) 8; 11,75; 4; 10; 12; б) 8; 0,375; 2; 1; 0,5; в) 8; $-1{,}25$; 10; моды нет; $-0{,}5$; г) 5; 120,2; 4; 121; 121. **62.** $19\frac{1}{13}$ центнера с 1 га; среднее арифметическое. **64.** 21. **65.** 210. **66.** 2. **68.** а) 12; б) 10 или 20; в) не существует. **69.** Среднее арифметическое 3,5; размах 5; моды: 2, 4 и 6; медиана 3,5. **70.** Пропущенная варианта равна 10,5. **71.** а) 25; б) 120 слов в минуту; в) 40 слов в минуту; г) 120 слов в минуту. **72.** а) 20; б) 32. **73.** 82, 98, 118 или 298 км. **79.** а) -16; 0; 39; в) 2; 2; 2; 2; г) 12; 10; 10; 12. **84.** $0{,}85a$ га. **85.** $0{,}8b$ кг. **88.** а) 0,35; б) 0,55. **89.** а) 8,55; б) $-\frac{1}{8}$; в) 30; г) $-\frac{1}{12}$. **92.** г) -5. **93.** а) $\frac{5}{6}$; б) -2; в) $4\frac{2}{3}$; г) $\frac{8}{17}$. **96.** б) $100a + b$; д) $625a + 25b + 5 + c$; е) $64x + 8y + z$. **97.** а) 51; 62; 73; 84; 95; б) 11; в) 12; 21; г) 21. **98.** г) $4n + 2$, где n — целое неотрицательное число; д) $5m + 4$, где m — целое неотрицательное число; е) $2n - 1$, где $n \in N$. **101.** а) Последовательность задаётся формулой $6n - 1$, где $n \in N$; в) $20 - 3n$, где $n \in N$. **106.** а) Таких значений нет; б) 0; в) -7; г) таких значений нет; д) 2,5 и $-2,5$; е) $\varnothing$. **111.** 4 км/ч. **112.** $n + 1$-я варианта.

К дополнительным упражнениям. **119.** б) $\left\{\frac{9}{13}; \frac{10}{13}; \frac{11}{13}; \frac{12}{13}\right\}$; в) $\left\{\frac{1}{13}\right\}$; г) $\left\{\frac{11}{13}; \frac{12}{13}\right\}$. **120.** б) {148; 518; 888}; г) {692; 782; 872; 962}; е) {236; 464; 925}. **121.** а) Простые числа, меньшие 30; б) сумма цифр числа равна 7; в) разность между числом десятков и числом единиц равна 5; г) числа, кратные 21. **122.** а) Правильные несократимые дроби с числителем 2 и бóльшие 0,1; б) дроби, у которых сумма числителя и знаменателя равна 9; в) правильные несократимые дроби, у которых числитель и знаменатель — однозначные нечётные числа; г) дроби, у которых произведение числителя и знаменателя равно 21. **124.** а) 16,5; б) 15,5. **134.** а) $\underbrace{999...9}_{100 \text{ раз}}$; б) $1\underbrace{44...4}_{99 \text{ раз}}3$. **135.** а) 0,15; б) $\frac{8}{225}$. **137.** Размах 2,5, среднее арифметическое 2,8125, мода и медиана 3. **138.** Среднее арифметическое, размах, мода, медиана: а) 79,5; 6; 77; 79,5; б) $-8\frac{7}{9}$; 9; три моды: -11, -9 и -5; -9. **139.** Пропущенное число 7; объём 15; мода 8; размах 3; медиана 10. **141.** б) $n \in \{6; 17; 28; 39; ...\}$; в) $n = 2$; д) $n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$; е) $n = 4$; ж) $n < 25$; з) $n = 4{,}75$. **143.** а) $\frac{1}{3n}$, где $n \in N$ и $n \leqslant 5$; б) $\frac{1}{3n+2}$, где $n \in N$ и $n \leqslant 5$; в) $-\frac{1}{2n-1}$, где $n \in N$ и $n \leqslant 5$; г) $\frac{1}{2n-1}$, где $n \in N$ и $n \leqslant 5$; д) $\frac{2n-1}{2n+1}$, где $n \in N$ и $n \leqslant 6$; е) $\frac{2}{2n+1}$, где $n \in N$ и $n \leqslant 6$. **145.** а) {942, 832, 722, 612, 502}; г) {231, 613}. **146.** а) 16; 25; 34; 43; 52; 61; б) 29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92; в) 12; 21; г) 31. **147.** а) $t \neq 1$; б) $t \neq 4$; в) $t \neq 0$; г) $t < 0$. **148.** a^2 и $-\frac{1}{a}$. **149.** $p + 1$, $2p$ и $p^2 + p$. **150.** $1 - \frac{1}{n+1}$. **151.** $6a - a^2$ см². **152.** а) $m + 18$; б) $m + 15$. **153.** $\frac{230}{v_1 + v_2}$ ч. **154.** $\frac{30}{v_2 - v_1}$ ч. **155.** $2{,}1a + 1{,}03b$ р. **156.** а) $1000 + 10n$ р.; б) $1000 + 20n + 0{,}1n^2$ р.

Глава 2

К параграфу 3. **162.** д) 1,0106; е) $-2{,}008$. **163.** а) $-0{,}25$; б) $-0{,}95$; в) $-3{,}01$; г) 0,088. **164.** Основание системы счисления — число 7; в саду росло 45 деревьев. **169.** а) -64; -1; -9; б) $-2{,}5$; 0; -450; в) 2,1; 0; $-127{,}5$; г) $-4{,}4$; 0,4; 0,7. **170.** а) -38; б) 10,44; в) $-6{,}2$. **171.** а) 216 см^3; б) 13,5 дм^3. **172.** а) 352 см^2; 320 см^3; б) 3168 см^2; 8640 см^3. **174.** а) $-0{,}26$; б) $-0{,}04$; в) 472; г) -6908; д) -85; е) -44. **182.** а) 3; б) 3; в) 1,5; г) 1. **187.** г) $\frac{4}{9}$. **188.** а) 0,22; б) $-0{,}16$. **198.** а) 2; б) 2; в) 0; г) 1. **199.** г) 1,44; д) $-0{,}7$; е) $-73{,}96$. **201.** а) 9; б) 6; в) 49; г) 25. **202.** в) -3; г) -110. **205.** а) 125; б) -196. **206.** а) $\frac{5}{9}$; б) $1\frac{2}{3}$; в) $-\frac{5}{12}$; г) $-0{,}2$ при $t > 0$ или -5 при $t < 0$. **207.** в) Ласточка пролетела на $800a$ м больше.

К параграфу 4. **209.** а) 14; б) 33,75; г) 0,25. **210.** а) $-0{,}96$; б) 54; в) $-175\,000$. **216.** д) $0{,}06b^2c^7$; е) $2{,}7a^3b^3$. **222.** $0{,}384a^3$ см^3. **223.** е) $2n$; ж) степень не определена; з) 0. **231.** а) $-5\frac{1}{3}a^3b^7c^5$; б) $64a^8x^6y^{12}$; в) $-0{,}004a^5b^7c^9$; г) $28a^{10}x^7y^5$. **234.** в) 10 000; г) 1; д) 50 000; е) 4. **235.** а) 2187; б) 648; в) $-0{,}57$. **241.** а) m^9; б) $-m^6$; в) $3m^6$. **242.** е) $\frac{m^{4x}}{n^{4y}}$. **243.** б) $\left(-\frac{2a^2}{b}\right)^5$. **244.** а) 8; б) $-\frac{1}{128}$; в) 81; г) -352. **245.** а) 16; б) -16; в) 0,25; г) 0,6. **246.** а) $\frac{10}{17}$; б) 3,1; в) 0,25; г) 0,6; д) 2; е) $2\frac{1}{3}$. **247.** а) 1; б) 3; в) 1; г) 1. **257.** а) $108a^{11}$; б) b^{20}; в) $-90c^{20}$; г) $1500a^9b^{10}$; д) $-3x^{17}y^5$; е) $-108a^7b^7$. **258.** а) $32a^9b^9$; б) $-0{,}001x^{14}y^{11}$; в) $-3a^7b^{11}$; г) $0{,}008a^7b^7c^6$; д) $-0{,}0001a^3b^3c^{11}$; е) $-10m^9n^8$; ж) $36m^6n^2$; з) $-7x^{16}y^2$. **259.** а) $-a^5b^3$; б) $-a^7b^{10}$; в) $-4y^{20}$; г) $81a^{26}b^{12}$; д) $-0{,}1x^{22}y^7$; е) $2{,}56m^{15}n^5$; ж) p^8q^7; з) m^8n^{13}. **275.** а) 0,5; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{4}$. **276.** 80%.

К дополнительным упражнениям. **278.** а) 666; б) 666; в) 666. **297.** а) 6; б) 16; в) 4; г) 9. **299**. а) 48; б) $1\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{125}$; г) -16. **300.** а) 2048; б) 512; в) 4096; г) 128. **302.** а) $-17{,}88$; б) $1\frac{26}{27}$. **303.** а) 294; б) $-0{,}75$; в) 0,808; г) -521. **307.** а) $27a^{22}b^{13}$; б) $0{,}57x^6y^5z^5$; в) $20c^8p^{19}$; г) $-9{,}3a^5b^9c^{13}$. **319.** г) $-15x^3y^{14}$; д) $7x^{20}y^{20}$; е) $-0{,}04p^{17}q^{19}$. **320.** а) $-10\,125a^{10}b^4$; б) $16x^{12}y^8$;

в) $-3x^7y^7$; г) $0{,}25a^{12}c^{19}$; д) $-16p^{17}q^{14}$; е) $x^{10}y^8$; ж) $-m^{11}n^9$; з) $-4a^6c^{14}$. **321.** а) $48x^{m+8}y^5$; б) $-x^{m+1}y^{m+1}$; в) $64a^{m+6}c^{n+3}$; г) $0{,}07x^{2n+1}y^3$; д) $-500x^{3n+4}y^7$; е) $-27a^{5n+3}b^6$; ж) $-a^{5n+4}b^5c^{12n}$; з) $5a^{3n+2}x^{3m+4}$.

Глава 3

К параграфу 5. **328.** а) -168; б) 17,5; в) 532; г) $-24{,}84$. **329.** При $x = 1$. **337.** б) 7; 25; 103; 257; 115. **339.** а) 179,5; б) 820. **341.** В стандартном виде многочлены записаны в пунктах в), д), е). **352.** в) Не более $m + 1$. **353.** б) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$. **354.** Коэффициенты вычисляются при значении k, равном: а) -2; б) -3; в) -1; г) 1. **355.** $a = -1$. **356.** $0{,}265ab$ м^2. **357.** $0{,}44xy$ см^2. **362.** в) 1; г) 0. **364.** 2 ч 40 мин. **365.** 1,2 кг.

К параграфу 6. **368.** $10a - 25$ марок. **370.** $5a + 20$ км. **371.** $4{,}1a - 8$ изделий. **372.** $3{,}7a - 40$ кг. **373.** а) $-2c + 9$; б) $-4x - 1$; в) $-13y$; г) $-8{,}2a^2 + 2ab$. **375.** а) $3x^2 - x + 1$; б) $5x + 4$; в) $-5ab^2 - 2ab + 1$. **379.** а) 0,09; б) $-28{,}6$; в) $-36{,}84$; г) 12,718. **380.** а) $8a^2$; б) $-3x^2 - 4x$; в) $10xy - 1$; г) $-1{,}5a$. **381.** а) 17; б) $-\frac{1}{3}$. **382.** а) 10,9; б) 7. **387.** -14, -7, 0, 7, 14. **392.** а) Нет; б) нет. **396.** а) $-4{,}5a^{16}b^8$; б) $3x^8y^7$; в) $0{,}6x^{n+7}$; г) $-0{,}02a^{n+2}$. **397.** а) $-17a + 6$; б) $36b - 48$; в) $0{,}1x + 2{,}3$; г) $8p - 34$; д) $7c - 6$; е) $-1{,}1y - 1{,}6$. **398.** а) 57; б) -34; в) 11; г) 11. **400.** $1{,}75a^2 - 2{,}8a$ м^2. **401.** $66b + 48$ км. **405.** в) $\frac{1}{18}a^3b^3 - \frac{1}{9}a^2b^2 + 0{,}1ab$; г) $0{,}05a^4b^6 - \frac{1}{15}a^3b^6 - \frac{1}{6}a^2b^5$. **408.** а) $5{,}4a^{2n+1} + 4a^{2n} - 5{,}8a^{2n-1}$; б) $-1{,}7b^{2n} + 1{,}1b^{2n+1} - 4{,}5b^{n+4}$. **409.** д) $2a^3 - 6a$; е) $15p^3 + 36p^2$; ж) $-4mn^2$; з) $2y^3 - 2x^3$. **410.** а) $13m$; б) $2a^4 + 49a^3$; в) $-5x^4 - 18x^3$; г) $-5y^3$. **411.** а) -4; б) -12; в) 1 и -1; г) нет корней. **412.** а) -425; б) 315. **413.** а) 0,972; б) -3. **416.** в) Степень $2n + k$, старший коэффициент -4; г) степень $2m + 3$, старший коэффициент $m(m + 3)$. **417.** а) -3; б) 2 и -2. **418.** 2. **419.** а) -5; б) 0; в) -1. **421.** а) 5; б) 3 или 9; в) 7. **422.** а) 7,8; б) 0,28. **423.** $91a$ р. **424.** а) 7; б) $\frac{1}{11}$; в) $3\frac{2}{3}$. **425.** а) $-9a^{14}b^{10}$; б) $-4x^{12}y^{21}$. **431.** а) $x^{2n} - 9$; б) $a^{2n} - b^{2n}$; в) $a^{n+1} - a^{n-1}$; г) $x^{n-2} - x^{n+2}$. **432.** а) $x^3 - 4x^2 - 3x - 10$; б) $a^3 - 3a^2 + 3a - 2$; в) $b^3 - 5b^2 + 5b - 4$; е) $2a^3 - 7a^2b + ab^2 + b^3$. **433.** а) $a^3 + 1$; б) $x^3 - 8$; в) $a^4 - 1$; г) $x^6 - 1$. **434.** а) $a^4 + a^3 - a^2 + 5a - 2$; б) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 11x + 6$. **435.** а) $-3x^3 - 5x^2 + x - 2$; б) $-6a^3 + 13a^2 - 4a + 4$; в) $2a^4 - 10a^3 + 14a^2 - 4a$; г) $-b^4 - 64b$. **436.** а) $a^3 + 2a^2 - 5a - 6$; б) $x^3 - x^2 - 14x + 24$. **437.** а) $b^2 + 8b + 16$; б) $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$; в) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. **438.** а) $-10a - 4$;

б) $36x^2 + 40$; в) $2a + 2$; г) $-2b^2 - 8a^2$; д) $x^2 - 2xy$; е) $3b^2 - 2b + 1$. **439.** а) $8x + 38$; б) $-25a + 1$; в) $4a^2 + 31a - 3$; г) $3y^2 + 15$. **440.** а) 4; б) $-\frac{3}{17}$; в) 1; г) $-\frac{1}{11}$. **441.** а) $3{,}4x - 1{,}4$; б) $-0{,}34a + 1$; в) $-\frac{1}{6}a + 3$; г) $3y - 5\frac{2}{3}$. **442.** а) $-2x - 23$; б) $4b - 6a - 4$; в) $3a^2 + 8a + 14$; г) $-2a - 6b - 1$. **443.** а) 3,74; б) −3,5. **444.** а) $3^{3n} - 1$; б) 1; в) 7^{5n}; г) 2^{4n}. **450.** 6. **451.** 2. **452.** а) $5a^2b^2$; б) $-12p^2x^2y^2$. **454.** а) −82; б) 13,4. **456.** а) 7203; б) −13 122; в) 3020; г) 767.

К дополнительным упражнениям. **459.** а) −2; б) 0,873. **461.** а) 1275; б) 10 050; в) 60 100. **464.** а) −44; б) −44. **474.** $4x^3y^2 - 4x^2y^3 + 31$. **475.** $2{,}1a^2 - 5{,}7b^2 - 9{,}4$. **481.** 91. **482.** б) 245; г) $124a - 124c$. **484.** $73a + 25b$. **485.** $90a$ р. **486.** а) $m + 7$; б) $5p$; в) $-0{,}2x^2 + 0{,}82x$; г) $-7b - 7$. **487.** а) $5x^4 - x^3$; б) $-b$; в) $0{,}01x^6 + 0{,}1x^2$; г) $\frac{1}{128}a^4 - 2a$. **488.** а) $-2x$; б) −1. **489.** Если обозначить двузначное число через x, то, следуя обратной последовательности, получим тождество $(x - 9)(x + 9) = x^2 - 81$. **492.** 0. **497.** 129; 125; 141. **498.** а) $8a^2 + 16$; б) $2x^2 - 48$; в) $-7x - 4$; г) 6. **499.** а) Нет; б) нет; в) нет; г) да.

Глава 4

К параграфу 7. **515.** а) $1{,}1a - 90{,}3$; б) $-0{,}6b$. **519.** е) $3\frac{4}{7}$; ж) 0,6; з) $\frac{20}{21}$; и) $-\frac{12}{35}$. **522.** а) 2; −2; б) $1\frac{1}{4}; -1\frac{1}{4}$; в) 0; г) корней нет. **523.** б) 45; в) −225; г) 750. **531.** а) 3,2; б) 60. **532.** а) 9; б) $1\frac{2}{3}$.

К параграфу 8. **534.** а) 7; е) $-\frac{1}{6}$; з) 48; и) −12. **536.** а) 0,3; б) $\frac{1}{18}$; в) −2,2; г) $2\frac{2}{11}$. **537.** а) 4; б) 9; в) $5\frac{5}{7}$; г) $16\frac{2}{97}$; д) $\frac{9}{32}$; е) 13,5. **538.** а) $-\frac{4}{13}$; б) 130. **539.** а) −4; 12; б) −0,1; 2,3; в) $3\frac{1}{3}$; г) корней нет; д) 4,5; −8,5; е) −5,5; −3,5; −0,5; 1,5. **540.** а) $a = 0{,}6$; б) $a = \frac{1}{3}$; в) $a = 4\frac{3}{4}$ и $a = 4\frac{1}{4}$; г) при всех $a \leqslant 1$. **541.** г) $x = \frac{4a - 5b + 6}{k}$. **542.** а) 1; б) 2; в) 1,5; г) 0. **543.** а) 3; б) корней нет; в) −6; г) корней нет; д) корней нет; е) −15. **544.** а) 0; б) 0; в) $1\frac{2}{3}$; г) корней нет; д) корней нет; е) корней нет.

545. а) 3; б) x — любое число; в) корней нет, г) корней нет. **547.** а) $a = -3$; б) $a = -3$. **548.** $b = -0,9$. **549.** а) Корней нет; б) $-3,8$; в) 2; г) любое число. **550.** а) Корней нет; б) любое число; в) 0; г) 1. **551.** $a = -1\frac{1}{12}$. **552.** а) -1; б) 1; в) $\frac{12}{29}$; г) $\frac{2}{9}$. **553.** а) -1; б) $\frac{1}{13}$; в) $\frac{19}{24}$; г) $\frac{2}{49}$. **554.** а) 1; 2; 4; б) 4; 5; 7. **555.** а) 2,5; б) $5\frac{5}{6}$; в) $2\frac{7}{9}$; г) $\frac{1}{6}$. **556.** а) x — любое число; б) x — любое число; в) таких x нет; г) таких x нет. **557.** а) 3,75; б) $-0,6$. **558.** а) 10; б) $1\frac{1}{3}$; в) $1\frac{2}{3}$; г) 0; д) -20; е) 1. **559.** а) 5; б) 0; в) 6; г) 1,5; д) 1,1; е) $-\frac{1}{3}$; ж) 2; з) 1,26. **560.** а) 10; б) -1; в) $\frac{2}{3}$; г) 20; д) 8; е) $\frac{1}{3}$; ж) 10; з) 37. **561.** Два случая: либо варианты 6 и 8 имеют частоты 2 и 3, либо 4 и 3. **562.** а) $b = 2$; б) $b = -13$. **563.** а) 23; б) 1,7; в) 4; г) 26,5. **564.** а) 4; б) $\frac{1}{9}$; в) 1,5; г) -3. **565.** а) Таких значений y нет; б) 0,8. **566.** а) 0,25; б) 4; в) 1; г) -3. **569.** а) $-0,8$; б) 1,04. **572.** 120 м^2, 138 м^2. **573.** 150 р., 170 р. **574.** 7, 14, 17 см. **575.** Таким способом расставить книги нельзя. **576.** 34, 68, 98 см. **577.** 80, 88, 68 компьютеров. **578.** 80 км. **579.** 27 учащихся. **580.** 26. **581.** 9. **582**. 3000 р. **583.** 4500 р. **584.** 1,5 км/ч. **585.** Да. **586.** а) 65 км/ч и 70 км/ч; б) 75 км/ч и 80 км/ч. **587.** $1\frac{1}{3}$ ч или 2 ч. **588.** 26, 28, 30, 32. **589.** 24 см и 20 см. **590.** 196 см^2. **591.** 25 рядов, 28 мест. **592.** 960 страниц. **593.** 720 курток. **594.** 600 изделий. **595.** 80 км. **596.** 270 км. **597.** $1\frac{1}{3}$ ч. **598.** 2,5 ч. **599.** 45 км. **600**. 20 км. **601.** 15 км. **602.** 360 туристов. **603.** 496 тетрадей. **604.** 28 учеников. **605.** 84 года. **606.** 9 кг. **607.** 4 л. **608.** а) 0,11; б) $-0,4$.

К дополнительным упражнениям. **622.** а) $a \neq 0$; б) таких значений a нет; в) $a = 0$. **623.** а) $b \neq 2$; б) $b = 2$; в) таких значений нет. **624.** а) $-2,5$; б) 4,875; в) корней нет; г) $-0,5$. **625.** а) $-6,5$; б) 2; в) -1; г) $\frac{2}{11}$. **626.** а) $\frac{10}{11}$; б) $-21,5$; в) $\frac{2}{3}$; г) -5. **629.** а) $a = 2,5$; б) $a = 2$; в) таких значений нет. **632.** $a = -3$. **633.** а) $a \neq 2$; б) не существует; в) $a = 2$. **634.** 22 банки. **635.** 40 т. **636.** 30 км. **637.** 7 см, 7 см, 15 см, 15 см. **638.** 93. **639.** Любое двузначное число, в котором 2 является цифрой десятков. **640.** 63 км. **641.** 21 км. **642.** 60 км/ч и 70 км/ч. **643.** 600 г и 120 г. **644.** 8 л. **645.** Любое натуральное число. **646.** 6, 7, 8, 9. **647.** 28 м и 42 м.

Глава 5

К параграфу 9. **651.** а) $x^n(x^2-1)$; б) $y^n(y^n-2)$; в) $z^{n-1}(z^{n-1}+1)$; г) $a^nb^{2n}(b^n-1)$; д) $p^{3n-1}q(p^{2n+2}-1)$; е) $a^2x^{n-1}(x^4+a^{n-1})$. **653.** а) 945; б) 14,5; в) −47,3; г) 7,2. **654.** ж) $3pq(0{,}4p-0{,}6q-q^2)$; з) $14mn^2(0{,}1m^2+$ $+0{,}3m-0{,}6)$. **655.** а) 5000; б) −137,5. **656.** е) $(x-1)(x+6)$; ж) $5(b+5)$; з) $(a+4)(4-a)$. **657.** а) $(x-a)(y-x)$; б) $(c-b)(b+d)$; в) $(3x-5)\times$ $\times(2x-17)$; г) $(a-b)^2(1-a)$; д) $(x-y)(x-y-b)$; е) $(x-5)\times$ $\times(ax-5a+b)$. **658.** а) $x(2x-1)(y-1)$; б) $a(b+2)(a+1)$; в) $y(x-7)(3-y)$; г) $a(a-b)(a+1)$; д) $9(2x-a)(4ax-1)$; е) $3a(x-2)\times$ $\times(5x-11)$. **659.** а) $3(a-5b)(2a+b)$; б) $2(3x-4y)(x-y)$; в) $a(a+9x)\times$ $\times(a-9x)$; г) $pq(p-10q)$. **660.** а) −4; б) 2. **661.** а) 1,1; б) 0,75. **662.** 6 ч. **663.** а) x^5-243; б) 90. **665.** д) $(b+1)(1-a)$; е) $(2x-y)(c-3)$; ж) $(3a+2b)(5x-7y)$; з) $(8p-1)(7q+1)$. **667.** а) $(y^2-a)(x-b+1)$; б) $(c^2-d)(a-b-c)$; в) $(x^2-a)(x^2-y^2-1)$; г) $(y^2-c)(b^3+b+1)$. **668.** а) $x(x-a)(y-b)$; б) $m(m^2+1)(n-2)$; в) $a(2b-3c)(3a+7b)$; г) $x(3y^2-2z)(5x-8y)$. **669.** а) $(x^n-1)(x+2)$; б) $(x^n-1)(3x^2-1)$; в) $(x^{n-1}-1)(a+2x)$; г) $(ax^n+1)(ax-1)$. **670.** в) $(x-3)(x+4)$; г) $(x-6)(x+5)$. **671.** а) 9; б) 52. **672.** в) $a(x-2y)(1-b)$; г) $a(a-b)\times$ $\times(x-y)$. **674.** 80 км/ч и 90 км/ч, 130 км/ч и 140 км/ч.

К параграфу 10. **675.** в) 138; г) 29. **676.** а) 52; б) 32. **677.** 1. **678.** а) 1092; б) 3905. **682.** г) Указание. Замените $a+b$ буквой x. Полученный трёхчлен $x^2-7x+12$ разложите на множители, а затем произведите обратную замену x на $a+b$. **689.** Ошибка в том, что обе части равенства разделили на нуль, так как $a-b-c=0$. **690.** а) $7x(x-3)^2$; б) $(x-y)(x-y-8)$; в) $(a-2b)(3ab+7)$; г) $(a+2b+3c)(x^2-3)$. **691.** а) $6ab+bc$; б) y^3-x^3. **692.** 44 см. **694.** д) 0; 0,6; е) 0; −8; ж) 0; 3; з) 0; $-2\frac{2}{3}$. **695.** а) {5; 7}; б) {2; 4}; в) {−1,5; 25}; г) $\left\{\frac{1}{3}; -\frac{2}{5}\right\}$; д) {2}; е) {−6; −1; 1}; ж) {8}; з) {3}. **696.** а) $A(-1{,}5)$ и $B(-2)$; б) $O(0)$ и $M(4)$; в) $A(-4)$, $B(-3)$, $C(3)$ и $D(4)$; г) $M(-1)$ и $N(1)$. **697.** а) $1>\frac{2}{3}$; б) $0{,}8<1$. **699.** а) 7; 8; б) −3; −7; в) −9; 8; г) −3; 6. **700.** а) 0; 2; 5; 7; б) 0; −3; 1; 4. **701.** 4 и 6. **702.** 406. **703.** 247.

К дополнительным упражнениям. **709.** ж) $a(a^3-5)(7a^6-2)$; з) $b(b^5-9)(3b^9-2)$. **710.** д) $(c+d)(a+b+c)$; е) $(a-b)(a-b+c)$; ж) $(a-b)(a-b-a^2)$; з) $(a-b)^2(a-b-c)$. **711.** а) $(y+z)(x-y)\times$ $\times(x+y)$; б) $(a^2+b^2)(ab+cd)$; в) $a^5(7a^5-1)(a^{10}-1)$; г) $a^2(a^{10}-3)\times$ $\times(2a^3-1)$. **712.** а) $(x-y)(ab+ac+bc)$; б) $(a^2-a)(x+b+c)$; в) $(5x^2-2)(6a^2-3b^2+c^2)$; г) $(x^2-5a^2)(x^2+2y^2+3z^2)$. **713.** г) $(b^2+1)\times$ $\times(b^2+10)$; д) $(b^2+1)(b^2-10)$; е) $(b-1)(b+1)(b^2+10)$. **714.** а) $4(x-2)^2$; б) $9(y+3)^2$; в) $25(a-2b)^2$; г) $4(c+3)^2$; д) $\frac{1}{4}(x+2)^2$; е) $\frac{1}{9}(y-2)^2$. **715.** а) Указание. Воспользуйтесь тем, что $1{,}7\cdot 3{,}2+3{,}2^2=$ $=3{,}2(1{,}7+3{,}2)=3{,}2\cdot 4{,}9$; б) 18; в) 1; г) $-2{,}4$. **716.** а) 1364; б) $\frac{63}{64}$. **717.** а) Указание. Воспользуйтесь тем, что $25^7=5^{14}$. **718.** Указание. При $a\in N$ значение выражения $a(a+1)(a+2)$ кратно 6, так как хотя бы один из множителей делится на 2 и один — на 3. **724.** в) 8; $-1\frac{1}{7}$; г) $-3{,}5$; 2,5. **725.** а) 0,5; 0,75; б) $-\frac{1}{3}$; $\frac{2}{9}$; в) $-0{,}5$; 1,5; г) $\frac{1}{7}$; $21\frac{1}{7}$; д) -1; 0; 1; е) -1; 0; 1; ж) -1; з) 1. **726.** 935. **727.** 740, 743, 746, 749.

Глава 6

К параграфу 11. **731.** а) a^4-9; б) m^2-x^4; в) m^4-p^6; г) $d^2-1{,}44c^4$; д) $25x^4-0{,}16y^4$; е) $6{,}25a^6-9b^8$. **732.** а) $9y^2-4x^4$; б) $9p^4-25n^2$; в) $4x^6-25a^4$; г) $16m^8-9n^4$. **734.** б) $\frac{1}{9}p^4-\frac{1}{4}m^2n^6$; г) $0{,}64b^4y^2-\frac{4}{9}a^2x^6$. **735.** а) $x^{2n}-y^{2n}$; б) $3^{2k}-2^{2k}$; в) $m^{6n}-p^{2k}$; г) $5^{4k}-4^{6m}$. **736.** а) $x^{2k+2}-$ $-y^{2k-2}$; б) $a^{4n-6}-b^{4m+2}$; в) $4x^{8n+10}-25y^{8n-10}$; г) $9p^{6m-4}-4q^{4n-6}$. **739.** а) x^4-y^4; б) $81-a^4$; в) m^4-625; г) $1-16p^4$. **743.** а) $73y^2-149x^2$; б) $17m^2-19k^2$. **744.** а) 0,5; б) 1; в) 3,5; г) $-1{,}4$. **747.** а) 0; $3\frac{2}{3}$; б) 0; $-\frac{6}{7}$; в) 0; $-\frac{2}{7}$; г) 0; 0,75. **748.** г) $\left(1\frac{1}{6}m^3\right)^2$. **750.** а) $1\frac{1}{3}$; б) 2,5. **751.** 15 км. **754.** ж) $(0{,}9x-1{,}1y)(0{,}9x+1{,}1y)$; з) $\left(\frac{3}{4}p-1\frac{1}{4}k\right)\left(\frac{3}{4}p+1\frac{1}{4}k\right)$. **755.** ж) $(0{,}2k-0{,}3an)(0{,}2k+0{,}3an)$; з) $\left(\frac{1}{3}ab-1\frac{2}{3}mp\right)\left(\frac{1}{3}ab+1\frac{2}{3}mp\right)$. **756.** д) 2,4; е) 11,25. **757.** в) 1. **758.** а) -5 и 5; в) нет корней; е) $-6\frac{2}{3}$; $6\frac{2}{3}$.

761. а) $(x^n - y^{2k})(x^n + y^{2k})$; б)$(5^{2p} - 3^n)(5^{2p} + 3^n)$; в) $(a^{3n+2} - b^{2n+1}) \times$ $\times (a^{3n+2} + b^{2n+1})$; г) $(y^{2-k} - x^{3m-1})(y^{2-k} + x^{3m-1})$; д) $(2x^{n-3} - 3y^{n+3})(2x^{n-3} +$ $+ 3y^{n+3})$; е) $(0{,}7a^{3-p} - 0{,}9b^{2p+1})(0{,}7a^{3-p} + 0{,}9b^{2p+1})$. **763.** а) $(3 - 2p)(15 +$ $+ 2p)$; б) $(8 - 3x)(16 - 3x)$; в) $\left(8x+3\frac{1}{3}\right)\left(8x+4\frac{2}{3}\right)$; г) $(3 - 13y)(17y - 3)$; д) $(12 - 13a)(19a - 12)$; е) $(25m + 3n)(25m + 7n)$. **764.** а) 2; –1; б) 3; –7; в) 1; $\frac{1}{3}$ г) 7; –1. **765.** г) $-(6x + 13y)(18x + 5y)$; д) $9(11a + 4b)(29a + 16b)$; е) $(11x^2 + 62)(59x^2 + 50)$. **766.** Равны или противоположны. **767.** а) 0; 2; б) $-4; -\frac{2}{7}$; в) –0,8; 0; г) –8; 0,4. **771.** 7 см. **772.** Делить на выражение $(n - n)$, равное нулю, нельзя. **776.** а) $(m + 3n)(m^2 - 2n)$; б) $(a - 2b^2) \times$ $\times (b - 2a^2)$. **777.** а) 3; б) 2; в) –1; г) –31. **778.** 50 км/ч и 70 км/ч.

К параграфу 12. **785.** ж) $36m^2 + 60mk + 25k^2$; з) $9p^2 - 24pc + 16c^2$. **786.** д) $\frac{9}{16}m^2 - \frac{9}{2}mn + 9n^2$; е) $16m^2 - 12mn + 2{,}25n^2$. **787.** а) $16m^4 + 40m^2n$ $+ 25n^2$; б) $9c^2 - 12cp^3 + 4p^6$; в) $4x^4 + 20x^2y^2 + 25y^4$; г) $49y^6 - 42y^3p^2 + 9p^4$; д) $\frac{1}{16}x^4 - 2x^2y^3 + 16y^6$; е) $\frac{4}{25}a^8 + \frac{2}{5}a^7 + \frac{1}{4}a^6$. **788.** а) $30x + 25x^2$; б) $40m - 16m^2$; в) $-16 - 24p$; г) $49k^2 + 1$; д) $4c^2 + 12c$; е) $4 + 112y$. **789.** а) $50m^2 - 30m +$ $+ 0{,}5$; б) $-6k^2 + 8k - 10\frac{2}{3}$; в) $2p^2 + \frac{3}{4}p + \frac{1}{8}$; г) $\frac{3}{16}c^2 + 2c + 1\frac{1}{3}$. **791.** а) $4x^{2n} +$ $+ 4x^ny^k + y^{2k}$; б) $\frac{1}{4}a^{4n+2} - 2a^{2n+1}b^{2n-1} + 4b^{4n-2}$; **792.** а) $-4m^2 - 5$; в) $14k - 14k^2 -$ $- 4$; е) $116 - 8c$; ж) $-10x - 34$. **794.** а) –1; б) 1250. **795.** а) 5; б) –1; в) 0; г) 1; д) –1; е) 0,4; ж) 3; з) –1,5. **798.** 9 и 11 см. **802.** а) $x^3 - x^2y -$ $- xy^2 + y^3$; б) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$; в) $-80m^2n + 16m^2 - 120mn + 24m -$ $- 45n + 9$; г) $8a^3 + 16a^2 - 32a - 64$; д) $c^4 - 18c^2m^2 + 81m^4$; е) $4a^4 + 12a^3b +$ $+ a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$. **808.** 15 страниц в час. **809.** 11 и 12 деталей в час. **811.** д) $(4x - 9y)^2$; е) $(11b + 2c)^2$. **812.** г) 49; 100; 4. **815.** $4x^2 - 6x + 2{,}25$; $4x^2 - 12x + 9$; $x^2 - 6x + 9$. **816.** а) –0,5; б) $\frac{2}{3}$; в) –4; г) 3; д) 0,4; е) –3. **817.** а) $\left\{-\frac{2}{3}; 4\right\}$; б) $\{0{,}25; -1{,}5\}$; в) $\{3; 0{,}2\}$; г) $\left\{\frac{1}{6}; -\frac{3}{4}\right\}$. **819.** е) $\left(3x^3 + \frac{1}{4}\right)^2$; ж) $(a^2b + 3)^2$; з) $(x - 3ay^2)^2$. **823.** Из того, что $a^2 = b^2$, следует, что либо $a = b$, либо $a = -b$. **824.** 6 см. **826.** а) 2,5; б) –0,2. **830.** 80 км/ч и 60 км/ч. **831.** б) –2; –1; 1. **833.** в) $(x + 3{,}5)^2 - 12{,}25$; г) $(x - 0{,}5)^2 - 0{,}25$. **834.** а) $(x - 3)(x + 2)$; б) $(x + 4)(x - 1)$; в) $(x - 3)(x - 5)$; г) $(x + 2)(x + 6)$.

835. д) $0,5(x-6)(x-1)$; е) $\frac{1}{3}(x+12)(x-4)$. **837.** При $x=-5$; 7. **838.** При $x=-1$; 8. **840.** а) Наибольшее $-1,75$; б) наименьшее 1,91; в) наименьшее 1; г) наибольшее 4. **841.** 16×16 м. **842.** 15×30 м; 450 м^2. **845.** 70 км/ч и 90 км/ч. **846.** 75 км/ч и 65 км/ч. **849.** а) $x^{2n+2} - 2x^{2n+1} + 3x^{2n} - 2x^{2n-1} + x^{2n-2}$; б) $9a^{2n+6} - 12a^{2n+5} + 10a^{2n+4} - 4a^{2n+3} + a^{2n+2}$.
850. а) $x^2 + 4y^2 + z^2$; б) $9m^2 + n^2 + k^2$; в) $32ab - 48a$; г) $24c + 10$. **856.** а) $(2x-3)^2$; б) $(7a-1)^2$. **857.** а) 1; б) $\frac{7}{60}$.

К параграфу 13. **860.** а) $-m^3 + 3m^2n - 3mn^2 + n^3$; б) $k^3 - 6k^2 + 12k - 8$; в) $-x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$; г) $p^3 - 1,5p^2 + 0,75p - 0,125$. **866.** а) $8x^3 + y^3$; б) $9x^2y - x^3$; в) $-9a^2b + 6ab^2 - b^3$; г) $-a^3 - 6a^2b - 9ab^2$. **870.** а) $-\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{9}$. **871.** а) -15; б) -32; в) -1; г) 2,5. **872.** 52. **873.** а) $(0; 2)$; $(0; -4)$; б) $(-2; 0)$; $(2; 0)$; $(4; 0)$. **879.** д) $\frac{1}{8}+8k^3$; е) $27p^3-\frac{1}{27}$; ж) $64a^3 + 125b^3$; з) $\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{27}y^3$. **880.** в) $(b-a)(b^2+ab+a^2)$; г) $(p+2)(p^2-2p+4)$.
882. д) $(0,2a-b)(0,04a^2+0,2ab+b^2)$; е) $(m+0,4n)(m^2-0,4mn+0,16n^2)$. **883.** а) $(a^n - b^n)(a^{2n} + a^nb^n + b^{2n})$; б) $(a^k + b^k)(a^{2k} - a^kb^k + b^{2k})$; в) $(x^{n-1} - y^{n-1})(x^{2n-2} + x^{n-1}y^{n-1} + y^{2n-2})$; г) $(x^{k+1} + y^{k+1}) \times (x^{2k+2} - x^{k+1}y^{k+1} + y^{2k+2})$. **885.** д) $(mn^2 - a)(m^2n^4 + amn^2 + a^2)$; е) $(p^2q + a)(p^4q^2 - ap^2q + a^2)$. **888.** а) 2; б) $-0,5$. **889.** 45, 20 и 10 м. **891.** а) $(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$; б) $(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$; е) $(2x-y)(16x^4+8x^3y+4x^2y^2+2xy^3+y^4)$. **896.** а) 0,35; **897.** Три точки: $(-6; -0,5)$; $(-2; -0,5)$; $(2; -0,5)$. **904.** а) -1; 0; 1; б) $-0,5$; 0; 0,5; в) -1; 0; 1; г) $-1,5$; 0; 1,5. **907.** а) -4; б) 1,5. **909.** а) $m(m-n)(1-m)$; б) $p(p-q)(p+1)$; в) $3x(y-x)(2x-1)$; г) $2k(p-1)(p+2k)$. **912.** а) $(x-y)(x-1)(x+1)$; б) $(a+b)(2-b) \times (2+b)$; в) $(p+3)(p-k)(p+k)$; г) $(b-2)(c-b)(c+b)$.
913. в) $(a+1)(7a^2-6a+7)$; г) $(b-1)(8b^2+11b+8)$. **914.** а) $(x-y)^2 \times (x+y)(x^2+xy+y^2)$; б) $(m^2+n^2)(m+n)(m^2-mn+n^2)$; в) $(a-2)^2 \times (a+2)(a^2+2a+4)$; г) $(1-p)(1+p)(3+p)(9-3p+p^2)$.
916. в) $a(a+b)^2(a-b)(a^2-ab+b^2)$; г) $b(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)$. **920.** в) $2(x-1,5)^2+0,5>0$. **921.** Объём, размах, среднее арифметическое, медиана ряда: а) 13; 98; $10\frac{8}{13}$; 3; б) 28; 98; $6\frac{15}{28}$; 3; в) 64; 98; $4\frac{35}{64}$; 3. Размах ряда остаётся постоянным, медиана при $n \geqslant 3$ постоянна, объём уве-

личивается, среднее арифметическое с увеличением n уменьшается, стремясь к числу 3.

К дополнительным упражнениям. **935.** $\frac{a^{64}-1}{a-1}$, если $a \neq 1$, 64, если $a = 1$. **937.** 66 см^2. **938.** 25×25 см; 1014 см^3. **943.** а) 160; б) 4,5. **950.** е) $\left(\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}b^2\right)^2$. **953.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **955.** в) 6859; г) $49\frac{8}{27}$. **957.** а) -1; б) 8. **971.** б) $\frac{1}{3}(3m-2)^2$; в) $0,5(4a-b)^2$. **972.** а) $10(3x^2-4)^2$. **973.** а) $3(2m-n)(2m+3)$. **974.** а) -6; -1; 1; б) -4; 4; 5; в) $-0,5$; 0,5. **975.** д) $(4x-3y)(4x+3y-5)$. **976.** а) $(2a-b-2)(2a-b+2)$; б) $(3-5x+3y)(3+5x-3y)$; в) $(6x+5y-5)(6x+5y+5)$; г) $(4-4a-3b)(4+4a+3b)$. **977.** а) $5(2x-3y+1)(2x+3y-1)$; б) $3(3c-2a+5b)(3c+2a-5b)$; в) $2(3a-10m+2)(3a+10m+2)$; г) $3(4p+3k-3s)(4p+3k+3s)$. **978.** а) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$; б) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

Глава 7

К параграфу 14. **979.** а) -1; -1; 0; 1. **988.** а) 2. **990.** -3; 0. **992.** а) $b > 1$; б) $b < 0$. **993.** а) $b = 1$; б) $b = 0$. **999.** $s=\begin{cases}12t, & \text{если } 0<t\leqslant 1,\\ 15t-3, & \text{если } 1<t\leqslant 2.\end{cases}$

1000. $h=\begin{cases}1+0,3x, & \text{если } 0<x\leqslant 5,\\ 0,5+0,4x, & \text{если } 5<x\leqslant 10.\end{cases}$ **1004.** б) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)^2$.

1006. а) $x(x-1)(x+1)(x^2+1)$; б) $(9a^2-3a+2)(3a-1)(3a+2)$. **1007.** б) -5; -3; 3. **1019.** а) Да; б) да; в) нет; г) да. **1020.** а) $k=-1$; б) $k=-5$; в) $k=-0,25$; г) $k=-1$. **1025.** а) -6; 29; б) 1; 7. **1028.** 36 км. **1029.** а) $-0,6$; 0; 0,6; б) -3; 0; 3.

К параграфу 15. **1045.** а) $b=-4$; б) $b=0,8$. **1046.** д) IV четверть; е) при $n<0$ II четверть, при $0<n<2$ III четверть, при $n=0$ точка N не лежит ни в одной из координатных четвертей. **1050.** а) Является; б) не является. **1056.** а) $y=2x$, где $x\neq 2$. **1062.** а) -4; 0; 4; б) -2; -1; 2. **1068.** а) $y=x-3$, где $x\neq 0$. **1069.** График функции проходит через точки: A, B, D и F. **1070.** а) $a=1$. **1071.** а) $k=-3,5$. **1072.** а) (5; 0) и (0; -6); б) (8; 0) и (0; 2); в) $\left(-1\frac{1}{9};0\right)$ и (0; 3); г) (100; 0) и (0; -1); д) $\left(1\frac{1}{6};0\right)$ и $\left(0;-\frac{1}{3};\right)$ е) $\left(-\frac{2}{35};0\right)$ и (0; -5). **1077.** а) $-8x^2+48x-72$;

б) $-12a^2+48a-48$. **1080.** 6 способов. **1086.** а) $y=-3x$. **1088.** а) (4; 13); б) (1; −1); в) (4; −3,4); г) (0,6; 7,8); д) (−0,015; −1,47); е) $\left(-\frac{1}{9};-3\right)$. **1091.** а) $y=-2x+3$. **1093.** а) 4; б) 4; в) любое число. **1094.** а) $b=8$; б) $b=-63$; в) $b=25$. **1095.** а) $(a-1)(a^2+a+1)(a^9+a^6+1)$; б) $(b-1)(b+1)(b^2+1)(b^2+c^2)$. **1096.** 810.

К параграфу 16. **1107.** в) Принадлежит; г) не принадлежит. **1113.** а) 0; б) 1; в) 3. **1115.** 11 т, 9 т и 12 т. **1123.** а)—в) Принадлежит; г) не принадлежит. **1130.** а), в) Принадлежит; б) не принадлежит. **1131.** (3; 9) и (4; 16). **1132.** 720 км.

К дополнительным упражнениям. **1139.** г) Множество всех чисел; д) $\{x \mid x \neq -1, x \neq 1\}$; е) $\{x \mid x \neq 2\}$. **1149.** $y=100x$. **1157.** $y=x+1$ и $y=-x+7$, где $1 \leqslant x \leqslant 5$. **1159.** $m(n)=2n+1$, где $n \in N$. Графиком функции являются точки с целочисленными координатами, лежащие на луче $m=2n-1$. **1162.** а) −4; б) −0,1; в) 0; г) −4; д) −3; е) 9; ж) при $k>0$; з) при любом $k \neq 1$. **1163.** $y=-\frac{1}{3}x$. **1166.** Указание. Найти коэффициенты k и b линейной функции, используя две данные точки. Затем проверить, принадлежит ли третья данная точка графику линейной функции. **1167.** а) 45°; б) 135°. **1170.** $a=1{,}5$ или $a=-1{,}5$. **1171.** $b=81$. **1172.** (0; 0) и (1; 1). **1175.** а), б) Принадлежит; в) не принадлежит. **1176.** а), б) Не принадлежит; в) принадлежит. **1183.** а) a^5, a^4, a^3, a^2, a; б) a, a^2, a^3, a^4, a^5; в) a, a^3, a^5, a^4, a^2; г) a^5, a^3, a, a^2, a^4.

Глава 8

К параграфу 17. **1196.** а) (−3; −3); б) (−1,5; 1,5); в) (−2,5; −1,5); (−3,5; −4,5). **1197.** а) $a=1$; б) $a=\frac{2}{3}$; в) $a=1$. **1205.** а) $m=6$; б) $m=2$; в) $m=7{,}5$; г) $m=0$, $m=1$. **1216.** а), г) Да; б), в) нет. **1217.** а) $x=2-3k$, $y=-2+4k$, где k — целое число; б) $x=-2+5p$, $y=-1+2p$, где p — целое число; в) $x=-20+5n$, $y=30-7n$, где n — целое число; г) $x=-16-11n$, $y=-4-3n$, где n — целое число. **1223.** 8 очков выбил 9 раз, 9 очков — 2 раза. **1224.** Например, отдать 5 пятирублёвых монет и получить сдачу — 3 двухрублёвые монеты.

К параграфу 18. **1233.** б) Бесконечно много; г) нет решений. **1238.** а) $(3x + y - z)(3x + y + z)$; б) $(a - b)(4 - a)(4 + a)$. **1239.** а) 4; б) 2,25; в) 4; г) 5. **1242.** а) (1; 4); б) (−2; −1); в) (3; 2); г) (−3; 9); д) (2,5; 1,5); е) (7; −2). **1243.** а) (1; 5); б) (−6; −7); в) (4; −3); г) (−5; 0); д) (0; 1); е) (5; 5). **1244.** а) $m = -5$, $n = -2$; б) $a = 1$, $b = -1$; в) (1; 1); г) $p = 3$, $q = 5$. **1247.** а) (−10; 5); б) $a = 4\frac{1}{3}$, $b = -1\frac{1}{9}$; в) $k = 7$, $p = -1$; г) $m = 5$, $n = -5$. **1248.** а) (6; −1); б) $a = -2$, $b = 2$. **1249.** а) (1; 0,5); б) (−1; 0,5). **1250.** а) $m = 4$, $n = -6$; б) $a = -3$, $b = 1$; в) (1; 6); г) $p = -4$, $k = -3$. **1251.** а) (−1; 2); б) $a = 4$, $b = 1$. **1257.** а) (2; −3); б) (−3; 3); в) (2; 5); г) (−2; −3). **1258.** а) (4; −2); б) (−2; 1); в) (2; −3); г) $a = 4$, $b = 3$; д) $u = 5$, $v = -4$; е) $m = -3$, $n = -3$. **1259.** а) $m = 5$, $n = -4$; б) $p = -4$, $k = -2$; в) (4; 10); г) $a = 5$, $b = -20$. **1264.** а) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$; б) $a = 0{,}5$, $b = 0$; в) $m = 2$, $n = 1$; г) $u = 1$, $v = 1$. **1265.** а) (0; 0,5); б) $p = 1$; $k = 2$. **1266.** а) $u = 2$, $v = 3$; б) $u = -2$, $v = -3$; в) (9; 10); г) $m = -4$, $n = 6$. **1267.** а) $m = 8$, $n = -6$; б) $p = -15$, $k = -12$; в) $u = 4$, $v = 12$; г) (−6; 15). **1268.** а) (−4; −9); б) $m = -10$, $n = 8$. **1269.** а) Бесконечно много; б) не имеет решений. **1274.** в) $3(5a + 2b)^2$; г) $-7(3x^2 - 2y)^2$. **1276.** 12 и −8. **1277.** 7. **1278.** 20 и 15. **1279.** 40 и 25. **1280.** 30 л. **1281.** 10. **1282.** 6 см, 6 см и 7 см. **1283.** 2 см. **1284.** 3 см и 30 см. **1285.** 8,5 г/см^3; 10,5 г/см^3. **1286.** 5 км/ч и 12 км/ч. **1287.** 5 гл/мин и 7 гл/мин. **1288.** 5 км/ч. **1289.** 45 км/ч и 40 км/ч. **1290.** 15 км/ч. **1291.** 20 и 15 км/ч. **1292.** 20 км/ч и 60 км/ч. **1293.** 10 км/ч и 12 км/ч. **1294.** 4 км/ч и 6 км/ч. **1295.** 12 и 15. **1296.** 20 и 30. **1297.** 80 га и 50 га. **1298.** 60 и 60. **1299.** 7. **1300.** $16\frac{4}{11}$ км. **1301.** 12 пятирублёвых и 16 двухрублёвых монет. **1304.** 10 км/ч и 15 км/ч. **1305.** Вес гири 16 кг, вес гантели 5 кг **1310.** а) $x = 8$, $y = 0$, $z = 7$; б) $x = 4$, $y = 2$, $z = -5$. **1311.** а) $x = 3$, $y = 5$, $z = 0$; б) $x = -4$, $y = -5$, $z = -7$. **1312.** а) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; б) $x = 2$, $y = -2$, $z = -5$. **1313.** а) $x = -1$, $y = 1$, $z = 5$; б) $x = 10$, $y = -5$, $z = 10$. **1314.** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $v = 4$, $u = 5$. **1319.** а) $(x - 2y)^3$; б) $(2x^2 + y)^3$.

К дополнительным упражнениям. **1324.** 3. **1325.** $27k - 2$, где $k \in N$. **1350.** а) (0; 2); б) (−0,5; 3); в) (2; 3); г) (1; −2). **1354.** 25 см. **1355.** 60 г. **1356.** 20 га и 15 га. **1357.** 2 тыс. **1358.** 12 л. **1359.** 30 см и 20 см. **1361.** 33 ц/га и 21 ц/га. **1363.** 8.

Задачи повышенной трудности

1365. 91. **1366.** 5674. **1368.** 89. **1373.** 1331. **1374.** а) 38; б) 88. **1375.** {164, 364}. **1376.** {216, 327, 438, 549, 550, 661, 772, 883, 994}. **1377.** {183, 189, 361, 367, 541, 543 547, 723, 729}. **1380.** $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{2}{3}$. **1381.** На 20%, на $33\frac{1}{3}$%. **1382.** Уменьшится на 6,25%. **1383.** 50 кг. **1384.** -4, -3, -1, 0, 5, 15. **1385.** а) $(x-2)(x^2+2x-1)$; б) $(y^2+y+1)(y^2-y+1)(y^4-y^2+1)$. **1386.** При $n = 1$. **1387.** 4. **1388.** а) $(y-1)(y^2-3y+1)$; б) $(y^2+3)\times\times(y^2-2y-1)$. **1389.** $(x^2-x+1)^2$. **1392.** 24 и 11; 36 и 29; 48 и 43; 228 и 227. **1395.** $x-y-1=0$. **1401.** $(-1; 2)$, $(1; 1)$, $(7; 4)$, $(5; 5)$, $(2; -1)$, $(4; 7)$. **1403.** а) 7 и -4; б) 2 и 6. **1404.** (314; 565). **1405.** (3; 2), $(-5; 2)$. **1406.** а) $(6; 5; -4)$; б) $(10; -6; -4)$. **1407.** 10 км/ч, 5 км/ч, 15 км. **1408.** В 3 раза. **1409.** 1700 м. **1410.** 2,5 ч.

Предметный указатель

Оглавление

Глава 8
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 243